VI LIETUVOS FIZIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
1966

ОБ ОПЕРАТОРАХ ЮНГА СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

А. А. ЮЦИС

(Поступило 17.VII.1965)

Рассматриваются элементы простых матричных подалгебр групповой алгебры симметрической группы S_n, соответствующие неприводимым представлениям группы, приведенным относительно цепочки подгрупп $S_n \supset S_{n-1} \supset S_{n-2} \supset \ldots \supset S_1$. Показано, что все примитивные идемпотентные элементы являются пределом одного ,,переменного'' элемента, имеющего в качестве коэффициентов при перестановках определенные функции n действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Предельные значения последних задаются соответствующей стандартной таблицей. ,,Переменный'' элемент кратен произведению, взятому в определенном порядке, $n(n-1)/2$ элементов вида $\left(\varepsilon+(x_s-x_r)^{-1}(sr)\right)$, где ε — единичный элемент группы и (sr) — транспозиция символов s и r. Результат сформулирован в конце третьего раздела. Соответственно удобные выражения получены для недиагональных элементов простых матричных подалгебр; в четвертом разделе дана формула, включающая, как частный случай, и результат предыдущего раздела.

1. Введение

С применением методов теории представлений симметрических групп в теоретической физике встречаемся непосредственно при построении многочастичных волновых функций, обладающих определенными неприводимыми свойствами симметрии по отношению к перестановкам координат частиц. Кроме того, хорошо известна связь между неприводимыми представлениями симметрических групп и групп линейных преобразований [1], с которыми, опять-таки, встречаемся в теоретических исследованиях многочастичных систем. В связи с этим оказывается целесообразным более подробное изучение конкретных свойств неприводимых представлений симметрических групп.

Элементами симметрической группы S_n являются $n!$ различных перестановок n символов $1, 2, \ldots, n$. Под перестановкой

$$s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1' & 2' & \ldots & n' \end{pmatrix}$$

будем понимать изменение расположения символов, при котором вместо 1 ставится $1'$, вместо символа 2 — символ $2'$ и т. д. В настоящей работе

исследуются элементы простых матричных подалгебр групповой алгебры S_n (раздел 1, гл. IV [1]):

$$o^{\lambda}_{\rho\rho'} = \frac{f_\lambda}{n!} \sum_s u^{\lambda}_{\rho'\rho}(s) s^{-1}, \tag{1.1.}$$

где $u^{\lambda}_{\rho'\rho}(s)$ — матричный элемент матрицы группового элемента s в неприводимом представлении $[\lambda]$ размерности f_λ; суммирование ведется по всем $n!$ перестановкам. В физической литературе многими авторами элементы (1.1) называются операторами Юнга. Справедлив следующий закон перемножения элементов $o_{\rho\rho'}$:

$$o^{\lambda}_{\rho\rho'} o^{\lambda'}_{\eta\eta'} = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\rho'\eta} o^{\lambda}_{\rho\eta'}. \tag{1.2}$$

Таким образом, диагональные элементы являются идемпотентными, т. е. $o^{\lambda}_{\rho\rho} o^{\lambda}_{\rho\rho} = o^{\lambda}_{\rho\rho}$. Число различных индексов ρ в случае группы S_n равно числу стандартных таблиц из n клеток (§ 4, гл. IV [2]). Две стандартные таблицы принадлежат одной и той же схеме Юнга, если совпадают числа клеток в строках обеих таблиц. Индексу λ в (1.1) соответствует определенная схема Юнга, задающая простую матричную подалгебру и, тем самым, неприводимое представление группы S_n. В дальнейшем роль индексов ρ и ρ' при данном λ будут играть стандартные таблицы схемы λ. Поэтому отпадает необходимость указания простой подалгебры специальным индексом.

Отбрасывая в стандартной таблице $T^n(\rho)$ клетки с символами $k+1$, $k+2$, ..., n, получаем стандартную таблицу $T^k(\rho)$ из k клеток определенной схемы Юнга, задающей неприводимое представление подгруппы S_k размерности f^k_ρ. Соответственно верхним индексом k будем указывать принадлежность данного элемента групповой алгебры S_n подалгебре S_k. Опускание верхнего индекса равнозначно присутствию индекса n.

Целью настоящей работы явилось нахождение элементов (1.1), дающих ортогональные неприводимые представления группы S_n, приведенные относительно цепочки подгрупп

$$S_n \supset S_{n-1} \supset S_{n-2} \supset \ldots \supset S_1. \tag{1.3}$$

Это представление названо А. Юнгом „ортогональным" в отличие от эквивалентного ему „натурального" представления, послужившего отправной точкой при нахождении первого [3]. А. Юнгом найдены матричные элементы представления транспозиций $(r\, r+1)$ рядом стоящих символов. Однако для элементов (1.1) не было дано никакой формулы. На основе результатов Р. М. Тралла [4] получены (§§ 17, 27 [5]) следующие рекуррентные соотношения:

$$o_{\rho\rho'} = \gamma_{\rho\rho'} o^{n-1}_{\rho\rho} P^n(\rho) N^n(\rho) \sigma(\rho\rho') o^{n-1}_{\rho'\rho'}, \tag{1.4}$$

где $\sigma(\rho\rho')$ — перестановка, переводящая $T^n(\rho')$ в $T^n(\rho)$, $P^n(\rho)$ и $N^n(\rho)$ — симметризатор и антисимметризатор соответственно по строкам и колоннам $T^n(\rho)$, $\gamma_{\rho\rho'}$ — численный множитель, зависящий от $T^n(\rho)$ и $T^n(\rho')$. Воспользовавшись выражением идемпотентных элементов в виде (1.4), Р. М. Тралл значительно сократил доказательство упомянутого основного результата А. Юнга. Несмотря на это, структура элементов (1.1) в случае „ортогонального" представления оставалась невыясненной.

Наши рассмотрения основаны на минимуме фактов, касающихся симметрических групп (в объеме, например, главы IV книги [2]). В разделе 2

настоящей статьи определяются некоторые элементы групповой алгебры S_n и устанавливается ряд элементарных их свойств, необходимых для дальнейшего изложения. В разделе 3 получена общая формула для идемпотентных элементов „ортогонального" представления[1]. В последнем, четвертом, разделе рассматриваются недиагональные элементы простых матричных подалгебр.

2. p-Элементы и их произведения

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n - n$ переменных из поля действительных чисел. Обозначая единичный элемент группы S_n и транспозицию символов s и r, соответственно, через ε и (sr), определим $n(n-1)$ элементов $p_{sr}(s \neq r = 1, 2, \ldots, n)$ следующим образом:

$$p_{sr}[x_s, x_r] = \left(\varepsilon + \frac{1}{x_s - x_r}(sr)\right). \tag{2.1}$$

Любое произведение элементов (2.1) дает элемент групповой алгебры $a[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \sum_s a_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, s$ с коэффициентами, являющимися определенными функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (с целью сокращения записи аргументы „переменных" элементов в дальнейшем иногда указываться не будут). Два элемента следует считать равными, если одинаковы соответствующие коэффициенты-функции. Непосредственным умножением убеждаемся, что:

$$p_{sr}p_{rs} = p_{rs}p_{sr} = \left[\varepsilon - \frac{1}{(x_s - x_r)^2}\right], \tag{2.2}$$

$$p_{sr}p_{kr}p_{ks} = p_{ks}p_{kr}p_{sr}, \tag{2.3}$$

$$p_{sr}p_{sk}p_{rk} = p_{rk}p_{sk}p_{sr}. \tag{2.3a}$$

Равенства (2.3) и (2.3а) являются частным случаем следующих более общих равенств:

$$p_{sr}p_{k_1r}p_{k_2r}\cdots p_{k_ir}p_{k_1s}p_{k_2s}\cdots p_{k_is} = p_{k_1s}p_{k_2s}\cdots p_{k_is}p_{k_1r}p_{k_2r}\cdots p_{k_ir}p_{sr}, \tag{2.4}$$

$$p_{sr}p_{sk_1}p_{sk_2}\cdots p_{sk_i}p_{rk_1}p_{rk_2}\cdots p_{rk_i} = p_{rk_1}p_{rk_2}\cdots p_{rk_i}p_{sk_1}p_{sk_2}\cdots p_{sk_i}p_{sr}. \tag{2.4a}$$

Последние соотношения получены i-кратным применением, соответственно (2.3) и (2.3а), учитывая при этом, что два p-элемента, не содержащие общего индекса, коммутируют.

Пусть I_α — определенное расположение натурально упорядоченных символов $(1 < 2 < \ldots < n)$ в ряд. Определим элементы $K_\alpha^s (s = 2, 3, \ldots, n)$ как произведение тех $p_{sr}(s > r)$, индекс r которых находится в расположении I_α левее индекса s. При этом порядок в произведении такой, что последовательность вторых индексов в нем совпадает с их последовательностью в расположении I_α. Если при данном s в I_α левее s нет ни одного символа $r < s$,

[1] Представление, отличающееся от „ортогонального" трансформацией подобия с помощью определенной диагональной матрицы, названо „полу-нормальным" [5]. Таким образом, идемпотентные элементы обоих представлений совпадают.

считаем, что соответствующий $K_\alpha^s=\varepsilon$. Аналогично определяем элемент D_α^s $(s=2, 3, \ldots, n)$ как произведение тех p_{sr} $(s>r)$, индекс r которых находится в расположении I_α правее индекса s. При этом опять же порядок в произведении D_α^s такой, что последовательность вторых индексов в нем совпадает с их последовательностью в расположении I_α. Пусть

$$E_\alpha=\left(\uparrow\prod_{s=2}^{n} K_\alpha^s\right)\left(\downarrow\prod_{s=2}^{n} D_\alpha^s\right), \tag{2.5}$$

где знаки $\uparrow$ и $\downarrow$ указывают, что произведение взято, соответственно, в порядке возрастания и убывания индекса s слева направо.

Докажем, что для любых двух расположений I_α и I_β

$$E_\alpha=E_\beta. \tag{2.6}$$

I_β может быть получено из I_α путем некоторой последовательности транспозиций рядом стоящих в каждом предшествующем расположении символов. Поэтому достаточно убедиться, что $E_\alpha=E_\beta$ для двух расположений I_α и I_β, отличающихся перестановкой двух рядом стоящих символов m и k. Пусть $m<k\leqslant n$, и k в E_α стоит правее m. Если $k=n$, то из определения (2.5) следует, что порядок p-элементов в E_α и E_β остается таким же, значит, $E_\alpha=E_\beta$. В случае $k<n$ порядок p-элементов в E_β отличается от порядка в E_α заменой местами рядом стоящих p_{sm} и p_{sk} в элементах K_α^s и D_α^s $(s>k)$ и переходом p_{km} из крайнего правого положения в K_α^k в крайнее левое в D_β^k. Таким образом, E_β получено из E_α многократным (для каждого $s>k$) применением перестановочного соотношения (2.3), откуда и следует (2.6). В соответствии с этим, в дальнейшем индекс α в обозначении E_α будем опускать, если его указание не будет целесообразным с точки зрения простоты изложения.

Из (2.6) вытекает следующее:

$$\hat{E}=E, \tag{2.7}$$

где через $\hat{E}$, в соответствии с принятым [1, 2], обозначаем элемент, получаемый из E заменой элементов группы на обратные, т. е., если $E=\sum_s e_s s$, то $\hat{E}=\sum_s e_s s^{-1}$. Действительно, так как для любых a и b

$$\widehat{(ab)}=\hat{b}\hat{a}, \tag{2.8}$$

а элементы $\hat{p}_{sr}=p_{sr}$, $\hat{E}_\alpha$ отличается от E_α заменой порядка p-элементов на обратный. Произведение p-элементов в новом порядке удовлетворяет определению (2.5) для расположения I_β, обратного расположению I_α, т. е., для расположения, получаемого из I_α переходом символа из k-того места в ряду слева $(k=1, 2, \ldots, n)$ в k-тое место справа. Так как, согласно (2.6), $E_\alpha=E_\beta$, получаем (2.7).

Пусть I_ν — расположение символов в натуральном порядке, т. е., в порядке возрастания слева направо. Для этого расположения все $D_\nu^s=\varepsilon$ $(s=2, 3, \ldots, n)$, так что $E=\uparrow\prod_{s=2}^{n} K_\nu^s$. Обозначая через E^k элемент, определенный,

аналогично определению (2.5), для подгруппы $S_k (k \leqslant n)$, состоящей из перестановок первых k символов, имеем следующее соотношение:

$$E^n = E^k \left(\uparrow \prod_{s=k+1}^{n} K_\nu^s \right). \tag{2.9}$$

Обозначим через $a[t(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ элемент, получаемый из $a[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ перестановкой t индексов переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть t_{kk+1} — транспозиция рядом стоящих в натуральном упорядочении символов k и $k+1$. Нетрудно убедиться в следующем:

$$p_{kk+1} E[x_1, x_2, \ldots, x_n] p_{kk+1} \left[1 - \frac{1}{(x_{k+1} - x_k)^2} \right]^{-1} =$$
$$= t_{kk+1} E[t_{kk+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] t_{kk+1}. \tag{2.10}$$

Действительно, свойство (2.6) позволяет представить $E[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ как произведение p-элементов в порядке, соответствующем следующему расположению символов I_α:

$$1, 2, \ldots, k-1, k+2, \ldots n-1, n, k+1, k.$$

При таком расположении крайним справа в выражении $E_\alpha[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, согласно (2.5), стоит элемент $D_\alpha^{k+1} = p_{k+1k}$, произведение которого с $p_{kk+1}[1 - 1/(x_{k+1} - x_k)^2]$ дает, вследствие (2.2), единичный элемент ε. Оставшийся левый множитель p_{kk+1} перенесем в правую сторону произведения, одновременно поменяв местами рядом стоящие K_α^k и K_α^{k+1} (согласно (2.4а)), а также (согласно (2.3)) p_{sk+1} и p_{sk} в выражениях D_α^s $(s > k+1)$. Полученное в итоге произведение p-элементов отличается от $E[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ транспозицией t_{kk+1} как символов в обозначениях элементов группы, так и индексов x-переменных. Однако перестановка t символов в обозначении элемента группы эквивалентна умножению слева на t и справа на t^{-1} (§ 2 [5]), что и завершает доказательство (2.10).

Для дальнейшего соотношение (2.10) необходимо обобщить на случай любой перестановки t. Пусть $I_{t\nu}$ — расположение символов, получаемое из натурального расположения I_ν перестановкой символов t, и $\bar{D}_{t\nu}^s$ — элемент, получаемый из $D_{t\nu}^s$ заменой всех p_{sr} $(s > r)$ на p_{rs}. Тогда:

$$\left(\prod_{s=2}^{n} d_{t\nu}^s \right)^{-1} \left(\downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}_{t\nu}^s \right) E[x_1, x_2, \ldots, x_n] \left(\uparrow \prod_{s=2}^{n} \hat{\bar{D}}_{t\nu}^s \right) =$$
$$= t E[t(x_1, x_2, \ldots, x_n)] t^{-1}, \tag{2.11}$$

где каждому p_{rs}, содержащемуся в $\bar{D}_{t\nu}^s$, соответствует множитель $[1 - 1/(x_s - x_r)^2]$ в $d_{t\nu}^s$. В справедливости (2.11) легко убедиться индуктивным рассуждением. Предварительно заметим, что правую сторону равенства (2.10) мы получим, если в определении элемента E будем пользоваться упорядочением символов знаком $>$, отличающимся от натурального упорядочения транспозицией t_{kk+1}. Пусть (2.11) справедливо для перестановок t' первых $k-1$ символов $1, 2, \ldots, k-1$ (в случае $k=3$ (2.11) верно вследствие (2.10)).

Тогда в левой части (2.11) между $\bar{D}^k_{t\nu}$ и $\hat{\bar{D}}^k_{t\nu}$ стоит $t' E[t'(x_1, x_2, \ldots, x_n)] t'^{-1}$. Однако из определения $\bar{D}^k_{t\nu}$ следует, что крайним справа в его выражении (и крайним слева в $\hat{\bar{D}}^k_{t\nu}$) является элемент $p_{rk}(k>r)$, где k и r — символы, рядом стоящие в расположении $I_{t'\nu}$ (и, соответственно, в упорядочении символов знаком $>$, для которого $t' E[t'(x_1, x_2, \ldots, x_n)] t'^{-1}$ совпадает с определением E для натурального упорядочения). Следующий элемент $p_{r'k}$ в выражении $\bar{D}^k_{t\nu}$ (и $\hat{\bar{D}}^k_{t\nu}$) имеет в качестве индексов символы k и r', рядом стоящие в расположении $J_{(kr)t'\nu}$, и т. д. Применяя на каждом шагу (2.10), получаем, что (2.11) справедливо и для перестановок k символов $1, 2, \ldots, k-1, k$.

В заключение настоящего раздела определим необходимое для дальнейшего изложения понятие предела „переменного" элемента $a[x_1, x_2, \ldots x_n] = \sum_s a_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) s$. Именно, пределом $a(\rho)$ элемента a при стремлении переменных к точке $x_i = \rho_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ назовем элемент, коэффициенты $a_s(\rho)$ в выражении которого являются пределами соответствующих функций $a_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е.:

$$a(\rho) = \lim_{x_i \to \rho_i} a[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \sum_s [\lim_{x_i \to \rho_i} a(x_1, x_2, \ldots, x_n)] s. \tag{2.12}$$

Предел (2.12) будем считать существующим, если существуют пределы всех $a_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не зависящие от пути приближения переменных к точке $x_i = \rho_i$. Если существуют пределы $a(\rho)$ и $b(\rho)$ элементов $a[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и $b[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, то из известных теорем о пределах суммы и произведения функций следует:

$$\lim_{x_i \to \rho_i} (a[x_1, x_2, \ldots, x_n]\, b[x_1, x_2, \ldots, x_n]) = a(\rho)\, b(\rho). \tag{2.13}$$

Пусть $P_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ — элемент, равен сумме всех $k!$ перестановок символов $r_1, r_2, \ldots, r_k$ $(r_i \neq s)$. Легко убедиться в справедливости следующего равенства:

$$P_{r_1 r_2 \ldots r_k}\left(\uparrow \prod_{i=1}^{k} p_{sr_i}\right) =$$

$$= P_{r_1 r_2 \ldots r_k}\left[\varepsilon + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{x_s - x_{r_i}} \prod_{p \neq i+1}\left(1 + \frac{1}{x_s - x_{r_p}}\right)\right)(sr_i)\right]. \tag{2.14}$$

Предел выражения (2.14) при стремлении переменных к точке с координатами $x_s = \rho_s$, $x_{r_i} = \rho_{r_i}$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\left.\begin{array}{ll} \rho_{r_i} - \rho_{r_{i-1}} = 1 & (i = 1, 2, \ldots, k) \\ \rho_s - \rho_{r_k} \neq 0 & \end{array}\right\}, \tag{2.15}$$

очевидно, равен

$$P_{r_1 r_2 \ldots r_k}\left(\varepsilon + \frac{1}{\rho_s - \rho_{r_k}} \sum_i (sr_i)\right) = \left(\varepsilon + \frac{1}{\rho_s - \rho_{r_k}} \sum_i (sr_i)\right) P_{r_1 r_2 \ldots r_k} \tag{2.16}$$

для любого $\rho_s \neq \rho_{r_k}$ (включая и значения $\rho_s = \rho_{r_i}$ при $i \neq k$).

Пусть, далее, $N_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ — элемент с коэффициентом -1 при всех $k!/2$ нечетных и $+1$ — при всех $k!/2$ четных перестановках символов $r_1, r_2, \ldots, r_k$. В этом случае имеем:

$$\left(\downarrow \prod_{i=1}^{k} p_{sr_i}\right) N_{r_1 r_2 \ldots r_k} =$$

$$= \left[\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{x_s - x_{r_i}} \prod_{p=i+1}^{k} \left(1 - \frac{1}{x_s - x_{r_p}}\right)\right)(sr_i)\right] N_{r_1 r_2 \ldots r_k}. \tag{2.17}$$

Предел выражения (2.17) равен

$$N_{r_1 r_2 \ldots r_k}\left(\varepsilon + \frac{1}{\rho_s - \rho_{r_k}} \sum_i (sr_i)\right) = \left(\varepsilon + \frac{1}{\rho_s - \rho_{r_k}} \sum_i (sr_i)\right) N_{r_1 r_2 \ldots r_k} \tag{2.18}$$

при стремлении переменных к точке с координатами, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\left.\begin{array}{ll} \rho_{r_i} - \rho_{r_{i-1}} = -1 & (i = 1, 2, \ldots, k) \\ \rho_s - \rho_{r_k} \neq 0 & \end{array}\right\}. \tag{2.19}$$

После этих предварительных замечаний переходим к обсуждению предельных значений элемента $E[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

3. Примитивные идемпотенты ортогонального представления

Пусть $T^n(\rho)$ — стандартная таблица, соответствующая схеме Юнга из m строк с числом клеток λ_k в k-той строке $\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = n\right)$. В настоящем разделе рассмотрим предел

$$\lim E[x_1, x_2, \ldots, x_n] \text{ при } x_i \to v_i(\rho) - u_i(\rho) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $v_i(\rho)$ и $u_i(\rho)$ — номера, соответственно, колонны и строки клетки с символом i в таблице $T^n(\rho)$. С этой целью представим E как произведение p-элементов в порядке, соответствующем следующему расположению I_η: первые λ_m символы слева в I_η являются символами m-той строки таблицы $T^n(\rho)$, расположенными в порядке возрастания слева направо, следующие λ_{m-1} символы являются символами $(m-1)$-ой строки, расположенными в порядке возрастания слева направо, и т. д. Очевидно, что в точке $x_i = v_i(\rho) - u_i(\rho)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ коэффициенты выражения $\left(\uparrow \prod_{s=2}^{n} K_\eta^s\right.$ являются непрерывными функциями (нет ни одного $1/(x_s - x_r)$ в этом выражении с превращающимся в нуль знаменателем в рассматриваемой точке). Нетрудно, далее, убедиться в следующем:

$$\lim_{x_i \to v_i(\rho) - u_i(\rho)} \left(\left(\uparrow \prod_{s=2}^{n} K_\eta^s\right)\right) = L^2(\rho)\, L^3(\rho) \ldots L^n(\rho)\, P^n(\rho), \tag{3.1}$$

где $P^n(\rho)$ — симметризатор Юнга, симметризующий по строкам $T^n(\rho)$, и

$$L^s(\rho) = \left(\downarrow \prod_{p > u_s(\rho)} \left(\varepsilon + \frac{1}{v_s(\rho) - u_s(\rho) + p - \lambda_p^{s-1}} \sum_{r < s\ (u_r(\rho) = p)} (sr)\right)\right). \tag{3.2}$$

Суммирование в (3.2) ведется по всем λ_p^{s-1} символам $r<s$, находящимся в p-той строке таблицы $T^n(\rho)$; произведение взято в порядке убывания индекса p слева направо (от максимального номера строки с содержащимися в ней символами $r<s$ до $(u_s(\rho)-1)$-ой строки). В справедливости (3.1) в случае $n=3, 4$ убеждаемся прямым умножением. Пусть (3.1) справедливо для $(n-1)$; докажем его справедливость для n. Имеем:

$$\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left(\uparrow\prod_{s=2}^{n}K_\eta^s\right)=\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left(\uparrow\prod_{s=2}^{n-1}L^s(\rho)P^{n-1}(\rho)K_\eta^n[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]\right)=$$

$$=\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left[\uparrow\prod_{s=2}^{n-1}L^s(\rho)P^{n-1}(\rho)\downarrow\prod_{p\geqslant u_n(\rho)}\left(\uparrow\prod_{r<n\,(u_r(\rho)=p)}p_{nr}[x_n,\ x_r]\right)\right]=$$

$$=\prod_{s=2}^{n-1}L^s(\rho)P^{n-1}(\rho)\prod_{p>u_n(\rho)}\left(\varepsilon+\frac{1}{v_n(\rho)-u_n(\rho)+p-\lambda_p^{n-1}}\prod_{r<n\,(u_r(\rho)=p)}(rn)\right)\times$$

$$\times\left(\varepsilon+\sum_{r<n\,(u_r(\rho)=u_n(\rho))}(rn)\right)=\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)P^{n-1}(\rho)\left(\varepsilon+\sum_{r<n\,(u_r(\rho)=u_n(\rho))}(rn)\right)=$$

$$=\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)P^n(\rho). \tag{3.3}$$

Здесь для каждой строки $p\geqslant u_n(\rho)$ применены (2.14)–(2.16) и использовано следующее соотношение:

$$P^{n-1}(\rho)\left(\varepsilon+\sum_{r<n\,(u_r(\rho)=u_n(\rho))}(rn)\right)=P^n(\rho). \tag{3.4}$$

Из (3.1) и (2.14)–(2.16) далее следует:

$$\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left(\uparrow\prod_{s=2}^{n}K_\eta^s D_\eta^s\right)=$$

$$=\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)\left(\varepsilon+\sum_{r<n\,(u_r(\rho)=u_n(\rho))}(rn)\right)\times$$

$$\times\downarrow\prod_{p<u_n(\rho)}\left(\varepsilon+\frac{1}{v_n(\rho)-u_n(\rho)+p-\lambda_p^{n-1}}\sum_{r<n\,(u_r(\rho)=p)}(rn)\right)P^{n-1}(\rho). \tag{3.5}$$

Появление правого множителя $P^{n-1}(\rho)$ в (3.5) позволяет применить (2.14)–(2.16) для нахождения предела произведения $\left(\uparrow\prod_{s=2}^{n}K_\eta^s D_\eta^n D_\eta^{n-1}\right)$, в правой стороне которого опять появляется множитель $P^{n-2}(\rho)$, что позволяет продолжить процесс. В итоге для предела элемента $E[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]$ получаем следующее выражение:

$$E(\rho)=\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}E[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]=\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)P^n(\rho)\downarrow\prod_{s=2}^{n}\tilde{L}^s(\rho), \tag{3.6}$$

где

$$\tilde{L}^s(\rho)=\downarrow\sum_{p<u_s(\rho)}\left(\varepsilon+\frac{1}{v_s(\rho)-u_s(\rho)+p-\lambda_p^{s-1}}\sum_{r<s\,(u_r(\rho)=p)}(rs)\right). \tag{3.7}$$

Найдем далее для предела элемента $E[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ выражение, содержащее в качестве множителя антисимметризатор Юнга $N^n(\rho)$, антисимметризующий по колоннам таблицы $T^n(\rho)$. С этой целью представим E как произведение p-элементов в порядке, соответствующем следующему расположению I_μ: первые $\tilde{\lambda}_l$ символы справа в I_μ являются символами последней, l-той колонны таблицы $T^n(\rho)$, расположенными в порядке возрастания справа налево, следующие $\tilde{\lambda}_{l-1}$ символы являются символами $(l-1)$-ой колонны, расположенными в порядке возрастания справа налево, и т. д. Дальнейший ход рассуждений аналогичен использованному при получении выражения (3.6). Именно, индуктивным рассуждением убеждаемся, что предел выражения $\downarrow\prod_{s=2}^{n} D_\mu^s$ равен:

$$\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left(\downarrow\prod_{s=2}^{n} D_\mu^s\right)=N^n(\rho)\downarrow\prod_{s=2}^{n} M^s(\rho), \tag{3.8}$$

где

$$M^s(\rho)=\uparrow\prod_{\tilde{p}>v_s(\rho)}\left(\varepsilon+\frac{1}{v_s(\rho)-u_s(\rho)+\tilde{\lambda}_{\tilde{p}}^{s-1}-\tilde{p}}\sum_{r<s\,(v_r(\rho)=\tilde{p})}(rs)\right). \tag{3.9}$$

Здесь суммирование ведется по всем $\tilde{\lambda}_{\tilde{p}}^{s-1}$ символам $r<s$, находящимся в p-той колонне таблицы $T^n(\rho)$. Произведение взято в порядке возрастания индекса p слева направо $\big($от $(v_s(\rho)+1)$-ой колонны до максимального номера колонны с содержащимися в ней символами $r<s\big)$. Действительно, вследствие справедливости (3.8) для $(n-1)$ (в случае $n=3$, 4 проверяем непосредственным умножением) и используя (2.17)–(2.19), имеем:

$$\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left(\downarrow\prod_{s=2}^{n} D_\mu^s\right)=\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left(D_\mu^n[x_1, x_2, \ldots, x_n]\,N^{n-1}(\rho)\downarrow\prod_{s=2}^{n-1} M^s(\rho)\right)=$$

$$=\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left[\uparrow\prod_{\tilde{p}\geqslant v_n(\rho)}\left(\downarrow\prod_{r<n(v_r(\rho)=\tilde{p})} p_{nr}[x_n, x_r]\right)N^{n-1}(\rho)\downarrow\prod_{s=2}^{n-1} M^s(\rho)\right]=$$

$$=\left(\varepsilon-\sum_{r<n\,(v_r(\rho)=v_n(\rho))}(nr)\right)N^{n-1}(\rho)\,M^n(\rho)\prod_{s=2}^{n-1} M^s(\rho)=N^n(\rho)\prod_{s=2}^{n} M^s(\rho). \tag{3.10}$$

Здесь (2.17)–(2.19) применено для каждой колонны $p\geqslant v_n(\rho)$, использован факт коммутирования $M^n(\rho)$ и $N^{n-1}(\rho)$, а также использовано соотношение для антисимметризаторов N, аналогичное соотношению (3.4) для симметризаторов P. Из (3.10) следует, что (3.8) справедливо для любого n.

Умножая (3.8) слева последовательно на K_μ^n, K_μ^{n-1} и т. д. и находя пределы на каждом шагу получаемого произведения с помощью (2.17)–(2.19), для предела элемента $E[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ имеем следующее выражение:

$$E(\rho)=\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)} E[x_1, x_2, \ldots, x_n]=\uparrow\prod_{s=2}^{n}\tilde{M}^s(\rho)\,N^n(\rho)\downarrow\prod_{s=2}^{n} M^s(\rho), \tag{3.11}$$

где

$$\tilde{M}^s(\rho)=\uparrow\prod_{\tilde{p}<v_s(\rho)}\left(\varepsilon+\frac{1}{v_s(\rho)-u_s(\rho)+\tilde{\lambda}_{\tilde{p}}^{s-1}-\tilde{p}}\sum_{r<s\,(v_r(\rho)=\tilde{p})}(rs)\right). \qquad (3.12)$$

Так как симметризатор $P^n(\rho)$ и антисимметризатор $N^n(\rho)$ не содержат другого общего множителя, кроме единичного элемента ε, из (3.6) и (3.11) следует, что в выражении $E(\rho)$ оба элемента $P^n(\rho)$ и $N^n(\rho)$ содержатся в качестве множителей. На основании теоремы Неймана (§ 12 [5]), далее, имеем:

$$\gamma\, E(\rho)=\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)\,P^n(\rho)\,N^n(\rho)\downarrow\prod_{s=2}^{n}M^s(\rho), \qquad (3.13)$$

где γ — численный множитель. Легко, однако, видеть, что коэффициент при элементе ε равен единице как в выражении $E[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, так и в правой части равенства (3.13). Действительно, при раскрытии как одного, так и другого выражения каждая перестановка, кроме ε, появляется в результате перемножения транспозиций, причем ни одна из них не встречается в произведении дважды (раскрывая правую часть (3.13), имеем в виду (3.4) и аналогичное соотношение для $N^n(\rho)$). Однако такая перестановка не может быть равна единичной, а при всех ε, входящих в множители рассматриваемых выражений, коэффициенты равны единице. Таким образом, в (3.13) $\gamma=1$.

Пусть m — неединичная перестановка, содержащаяся в множителе $\uparrow\prod_{s=2}^{n}M^s(\rho)$. Перестановка m^{-1} переводит стандартную таблицу $T^n(\rho)$ в таблицу $T^n(m^{-1}\rho)$ (в общем случае не стандартную), в которой наибольший из передвинутых символов (символ k) находится в строке большей длины, чем в $T^n(\rho)$. Поэтому $T^{k-1}(m^{-1}\rho)<T^{k-1}(\rho)$[2]. Если же l — одна из перестановок (не равная ε), содержащихся в $\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)$, и r — наибольший из передвигаемых ею символов, то $T^{r-1}(l\rho)>T^{r-1}(\rho)$, так как r в $T^n(l\rho)$ находится в строке с большим номером, т. е., в строке меньшей длины, чем в $T^n(\rho)$. Таким образом, $T^{\max(kr)-1}(l\rho)>T^{\max(kr)-1}(m^{-1}\rho)$. Комбинаторная лемма в таком случае утверждает (раздел 2, гл. IV [1]), что среди символов $1, 2, \ldots, (\max(kr)-1)$ существует по меньшей мере одна пара таких, которые в $T^n(l\rho)$ стоят в одной строке, а в $T^n(m^{-1}\rho)$ — в одной колонне. Отсюда следует, что если хотя бы один из m и l не равен единичному элементу, то:

$$N^n(\rho)\,ml\,P^n(\rho)=mm^{-1}N^n(\rho)\,ml\,P^n(\rho)\,l^{-1}l=m\,N^n(m^{-1}\rho)\,P^n(l\rho)\,l=0. \qquad (3.14)$$

---

[2] Считаем, что $T^s(\rho')<T^s(\rho)$, если первая (сверху) из неравных строк в схеме Юнга, соответствующей таблице $T^s(\rho)$, длиннее, нежели в схеме, соответствующей $T^s(\rho')$.

Поэтому для квадрата элемента $E(\rho)$ (ср. (3.13)) имеем:

$$E(\rho)\,E(\rho)=\left\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)\,P^n(\rho)\,N^n(\rho)\,P^n(\rho)\,N^n(\rho)\right\downarrow\prod_{=2}^{n}M^s(\rho)=$$

$$=\frac{n!}{f_\rho}\left\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)\,P^n(\rho)\,N^n(\rho)\right\downarrow\prod_{s=2}^{n}M^s(\rho)=\frac{n!}{f_\rho}E(\rho). \tag{3.15}$$

Здесь мы воспользовались известным равенством

$$P^n(\rho)\,N^n(\rho)\,P^n(\rho)\,N^n(\rho)=\frac{n!}{f_\rho}P^n(\rho)\,N^n(\rho), \tag{3.16}$$

где f_ρ — размерность неприводимого представления, задаваемого соответствующей схемой Юнга (§ 3, гл. IV [2]).

Введем элемент

$$o_{\rho\rho}=\frac{f_\rho}{n!}\,E(\rho)=\frac{f_\rho}{n!}\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}E[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]. \tag{3.17}$$

Из (3.15) следует, что $o_{\rho\rho}$ идемпотентный:

$$o_{\rho\rho}\,o_{\rho\rho}=o_{\rho\rho}. \tag{3.18}$$

Так как, согласно теореме Неймана (§ 12 [5]), для любого элемента групповой алгебры X

$$P^n(\rho)\,X\,N^n(\rho)=\gamma_x P^n(\rho)\,N^n(\rho),$$

где γ_x — численный множитель, то легко получаем:

$$o_{\rho\rho}\,X\,o_{\rho\rho}=\gamma_x'\,o_{\rho\rho}. \tag{3.19}$$

Отсюда следует, что $o_{\rho\rho}$ является примитивным идемпотентом (теорема 3.9 [2]). Нетрудно, далее, убедиться в том, что совокупность элементов $o_{\rho\rho}$, соответствующих различным стандартным таблицам, является совокупностью взаимно нормальных идемпотентов, т. е.:

$$o_{\rho\rho}\,o_{\rho'\rho'}=0 \text{ при } \rho\neq\rho'. \tag{3.20}$$

Для доказательства (3.20) предварительно отметим, что, если $p<s\leqslant n$, то:

$$\left.\begin{aligned}P^p(\rho)\,L^s(\rho)&=L^s(\rho)\,P^p(\rho)\\ N^p(\rho)\,M^s(\rho)&=M^s(\rho)\,N^p(\rho)\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

и

$$\left.\begin{aligned}P^n(\rho)\,P^p(\rho)&=\pi_p(\rho)\,P^n(\rho)\\ N^n(\rho)\,N^p(\rho)&=\mu_p(\rho)\,N^n(\rho)\end{aligned}\right\}, \tag{3.22}$$

где $\pi_p(\rho)$ и $\mu_p(\rho)$ — числа перестановок, содержащихся, соответственно, в $P^p(\rho)$ и $N^p(\rho)$. Пусть $T^n(\rho)$ и $T^n(\rho')$ — две различные стандартные таблицы, причем $T^p(\rho)<T^p(\rho')$ (если $p=n$, то $T^n(\rho)$ и $T^n(\rho')$ соответствуют различным схемам Юнга). Из (3.13), (3.21) и (3.22) следует:

$$o_{\rho\rho}\,o_{\rho'\rho'}=\frac{f_\rho f_{\rho'}}{(n!)^2}\,E(\rho)\,E(\rho')=\frac{f_\rho f_{\rho'}}{(n!)^2\,\pi_p(\rho)\,\mu_p(\rho)}\left(\left\uparrow\prod_{s=2}^{n}L^s(\rho)\,P^n(\rho)\,N^n(\rho)\right\downarrow\prod_{s=p+1}^{n}M^s(\rho)\times\right.$$

$$\left.\times N^p(\rho)\left\downarrow\prod_{s=2}^{p}M^s(\rho)\right)\left(\left\uparrow\prod_{s=2}^{p}L^s(\rho')\,P^p(\rho')\right\uparrow\prod_{s=p+1}^{n}L^s(\rho')P^n(\rho')N^n(\rho')\left\downarrow\prod_{s=2}^{n}M^s(\rho')\right)\right. \tag{3.23}$$

В выражении $X=\left\downarrow \prod_{s=2}^{p} M^s(\rho)\right\uparrow \prod_{s=2}^{p} L^s(\rho')$, стоящем между $N^p(\rho)$ и $P^p(\rho')$, содержатся только перестановки первых p символов 1, 2, ..., p. Так как, согласно предположению, $T^p(\rho)<T^p(\rho')$, из равенства (14.2) [5] следует, что $N^p(\rho)\,X\,P^p(\rho)=0$, откуда

$$o_{\rho\rho}\,o_{\rho'\rho'}=\frac{f_\rho f_{\rho'}}{(n!)^2}\,E(\rho)\,E(\rho')=0. \tag{3.24}$$

Вследствие (3.17) и (2.7) имеем:

$$\hat{o}_{\rho\rho}=o_{\rho\rho}. \tag{3.25}$$

Заменяя в равенстве (3.24) все перестановки на обратные и имея в виду (2.8) и (3.25), получаем:

$$\widehat{(o_{\rho\rho}\,o_{\rho'\rho'})}=\hat{o}_{\rho'\rho'}\,\hat{o}_{\rho\rho}=o_{\rho'\rho'}\,o_{\rho\rho}=0,$$

что и завершает доказательство (3.20).

Пусть $o^k_{\rho\rho}$ — идемпотент подгруппы $S_k\,(k\leqslant n)$ группы S_n, порождающий неприводимое представление размерности f^k_ρ. Из равенств (2.9), (3.15) и (3.17) следует:

$$o^n_{\rho\rho}=\frac{f^n_\rho}{n!}\lim_{x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)}\left(E^k\left\uparrow\prod_{s=k+1}^{n}K^s_\nu\right)=\frac{f^n_\rho}{n!}\lim_{x_p\to v_p(\rho)-u_r(\rho)}\left(E^k(\rho)\prod_{s=k+1}^{n}K^s_\nu[\rho^k x_p]\right)=$$

$$=\frac{f^k_\rho}{n!}E^k(\rho)\cdot\frac{f^n_\rho}{n!}\lim_{x_p\to v_p(\rho)-u_p(\rho)}\left(E^k(\rho)\prod_{s=k+1}^{n}K^s_\nu[\rho^k x_p]\right)=$$

$$=o^k_{\rho\rho}\,o^n_{\rho\rho}\qquad(p=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n). \tag{3.26}$$

Здесь под $K^s_\nu[\rho^k x_p]$ понимаем элемент, получаемый из $K^s_\nu[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s]$ предельным переходом $x_i\to v_i(\rho)-u_i(\rho)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$.

Воспользовавшись далее соотношениями (2.8) и (3.25), из (3.26) получаем:

$$o^k_{\rho\rho}\,o^n_{\rho\rho}=o^n_{\rho\rho}\,o^k_{\rho\rho}=o^n_{\rho\rho}. \tag{3.27}$$

Известно, что число взаимно нормальных примитивных идемпотентов в разложении единичного элемента группы равно сумме размерностей всех неприводимых представлений данной конечной группы (гл. III [2]). В случае группы S_n это число равно числу различных стандартных таблиц всевозможных схем Юнга. Таким образом, имеем полное разложение:

$$\varepsilon=\sum_\rho o_{\rho\rho}. \tag{3.28}$$

Из (3.18), (3.20), (3.27) и (3.28) получаем:

$$o^k_{\rho\rho}=o^k_{\rho\rho}\,\varepsilon=o^k_{\rho\rho}\sum_{\rho'}o^n_{\rho'\rho'}=o^k_{\rho\rho}\sum_{\rho'}o^k_{\rho'\rho'}\,o^n_{\rho'\rho'}=$$

$$=\sum_{\rho''\,(T^k(\rho'')=T^k(\rho))}o^k_{\rho''\rho''}\,o^n_{\rho''\rho''}=\sum_{\rho''\,(T^k(\rho'')=T^k(\rho))}o^n_{\rho''\rho''}. \tag{3.29}$$

Здесь $T^n(\rho'')$ — стандартные таблицы схем из n клеток, расположение в которых первых k символов одинаково и совпадает с их расположением в $T^k(\rho)$. Равенство (3.29) показывает, что $o_{\rho\rho}$ являются идемпотентами, названными А. Юнгом полунормальными [3.4] (ср., однако, со сноской 1). В заключение настоящего раздела сформулируем основной результат в виде следующей теоремы.

Примитивный идемпотент ортогонального представления группы S_n, соответствующий стандартной таблице $T^n(\rho)$, равен

$$\frac{f_\rho}{n!} \lim_{\substack{x_r \to v_r(\rho)-u_r(\rho) \\ x_s \to v_r(\rho)-u_s(\rho)}} \uparrow \prod_{s=2}^{n} \uparrow \prod_{r=1}^{s} p_{sr}[x_s, x_r]^{3)}, \tag{3.30}$$

где $v_r(\rho)$ и $v_s(\rho)$ — номера колонн, а $u_r(\rho)$ и $u_s(\rho)$ — номера строк клеток таблицы $T^n(\rho)$ с символами, соответственно, r и s, f_ρ — размерность данного представления.

4. Недиагональные элементы простых матричных подалгебр

Вследствие примитивности идемпотентов $o_{\rho\rho}$ недиагональные элементы $o_{\rho'\rho'}$ с точностью до численного множителя могут быть найдены следующим образом (§ 4, гл. III [2]):

$$o_{\rho'\rho} \sim o_{\rho'\rho'} X o_{\rho\rho}, \tag{4.1}$$

где X — любой элемент групповой алгебры, а $o_{\rho'\rho'}$ и $o_{\rho\rho}$ — идемпотенты, принадлежащие одной матричной подалгебре (знак пропорциональности ставим между двумя элементами, отличающимися численным множителем). Отметим, что $o_{\rho'\rho'}$ и $o_{\rho\rho}$ принадлежат одной матричной подалгебре ($o_{\rho'\rho'} X o_{\rho\rho}$ не равно тождественно нулю) тогда и только тогда, если $T^n(\rho)$ и $T^n(\rho')$ — две стандартные таблицы одной и той же схемы Юнга.

Пусть $\sigma(\rho'\rho)$ — перестановка, переводящая стандартную таблицу $T^n(\rho)$ в стандартную таблицу той же схемы $T^n(\rho')$. Тогда $\sigma^{-1}(\rho'\rho) = \sigma(\rho\rho')$. Воспользовавшись соотношением (2.11), выразим идемпотент $o_{\rho'\rho'}$ через $o_{\rho\rho}$, Предварительно отметим, что, если $p_{rs}(s>r)$ — элемент, содержащийся в качестве множителя в $\downarrow \prod_{s=2}^{n} \overline{D}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}$, то

$$\left| \left(v_s(\rho) - u_s(\rho)\right) - \left(v_r(\rho) - u_r(\rho)\right) \right| \geq 1. \tag{4.2}$$

Действительно, из определения $\downarrow \prod_{s=2}^{n} \overline{D}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}$ следует, что вместо символов $s>r$ в стандартной таблице $T^n(\rho)$, в таблице $T^n(\rho')$ стоят, соответственно, символы $s'<r'$. Поэтому $T^n(\rho')$ будет стандартной только в том случае, если одна из клеток в $T^n(\rho)$, занимаемых символами s и r, находится левее и

---

3) Здесь элемент E выражен в виде произведения p-элементов в порядке, соответствующем натуральному расположению I_ν символов 1, 2, . . ., n (ср. раздел 2).

ниже другой, откуда и следует (4.2), так как, согласно предположению, $T^n(\rho')$ — стандартная. Таким образом, предел

$$\lim_{x_i \to v_i(\rho) - u_i(\rho)} \downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu} = \downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}(\rho)$$

существует и равен (вследствие (4.2)) элементу, получаемому подстановкой вместо переменных x_i их предельных значений $v_i(\rho) - u_i(\rho)$. То же верно и для коэффициента $\prod_{s=2}^{n} d^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}$ (ср. (2.11)), причем предел последнего равен $\prod_{s=2}^{n} d^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}(\rho) \neq 0$. Поэтому, имея в виду определение идемпотентов $o_{\rho\rho}$ (3.17), из равенства (2.11), воспользовавшись (2.13), получаем:

$$o_{\rho'\rho'} = \frac{f_{\rho'}}{n!} \lim_{x_i \to v_i(\rho') - u_i(\rho')} E[x_1, x_2, \ldots, x_n] =$$

$$= \frac{f_\rho}{n!} \lim_{x_i \to v_i(\rho) - u_i(\rho)} E[\sigma(\rho\rho')(x_1, x_2, \ldots, x_n)] =$$

$$= \frac{f_\rho}{n!} \left(\prod_{s=2}^{n} d^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}(\rho) \right)^{-1} \sigma(\rho'\rho) \downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}(\rho)\, o_{\rho\rho} \uparrow \prod_{s=2}^{n} \hat{\bar{D}}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}\, \sigma(\rho\rho'). \quad (4.3)$$

Подставив в (4.1) выражение (4.3) для $o_{\rho'\rho'}$ и воспользовавшись (3.19), имеем:

$$o_{\rho'\rho} \sim \sigma(\rho'\rho) \downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}(\rho)\, o_{\rho\rho} \uparrow \prod_{s=2}^{n} \hat{\bar{D}}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}(\rho)\, \sigma(\rho\rho')\, X o_{\rho\rho} \sim$$

$$\sim \sigma(\rho'\rho) \downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}(\rho)\, o_{\rho\rho}. \quad (4.4)$$

Пусть $I_{\bar{\nu}}$ — расположение символов в ряд, обратное натуральному I_ν (ср. раздел 2). Тогда расположение $I_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}}$, получаемое из I_ν перестановкой $\sigma(\rho\rho')$, является обратным расположению $I_{\sigma(\rho\rho')\nu}$. Из определений элементов D^s_ν и K^s_ν следует, что

$$\uparrow \prod_{s=2}^{n} K^s_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}} = \uparrow \prod_{s=2}^{n} \hat{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}. \quad (4.5)$$

Так как $\uparrow \prod_{s=2}^{n} \hat{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}$ отличается от $\downarrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}$ только заменой порядка p-элементов в произведении на обратный, из (4.5) и (2.2) получаем:

$$\downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu} \uparrow \prod_{s=2}^{n} K^s_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}} = \downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu} \uparrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho\rho')\nu} = \prod_{s=2}^{n} d^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}. \quad (4.6)$$

Здесь (2.2) применено для каждой пары элементов p_{sr} $(s > r)$ и p_{rs}, содержащихся, соответственно, в $\downarrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}$ и $\downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho\rho')\nu}$. Выражая элемент E

в виде произведения p-элементов в порядке, соответствующем расположению $I_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}}$ (ср. (2.5)), из (4.4) и (4.6) получаем:

$$o_{\rho'\rho} \sim \sigma(\rho'\rho) \lim_{x_i \to v_i(\rho)-u_i(\rho)} \left(\downarrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho\rho')\nu} E \right) = \sigma(\rho'\rho) \lim_{x_i \to v_i(\rho)-u_i(\rho)} \left(\downarrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho\rho')\nu} \times \right.$$

$$\left. \times \uparrow \prod_{s=2}^{n} K^s_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}} \downarrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}} \right) \sim \sigma(\rho'\rho) \lim_{x_i \to v_i(\rho)-u_i(\rho)} \left(\downarrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}} \right). \quad (4.7)$$

С другой стороны, полученное заменой местами ρ и ρ' в (4.3) выражение $o_{\rho\rho}$ через $o_{\rho'\rho'}$ подставляя в (4.1), воспользовавшись (3.19) и выражая E-элемент в виде произведения p-элементов в порядке, соответствующем расположению $I_{\sigma(\rho'\rho)\nu}$, имеем:

$$o_{\rho'\rho} \sim o_{\rho'\rho'} X \sigma(\rho\rho') \downarrow \prod_{s=2}^{n} \bar{D}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho') \, o_{\rho'\rho'} \uparrow \prod_{s=2}^{n} \hat{\bar{D}}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho') \, \sigma(\rho'\rho) \sim$$

$$\sim o_{\rho'\rho'} \uparrow \prod_{s=2}^{n} \hat{\bar{D}}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho') \, \sigma(\rho'\rho) =$$

$$= \lim_{x_i \to v_i(\rho')-u_i(\rho')} \left(\uparrow \prod_{s=2}^{n} K^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu} \downarrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu} \uparrow \prod_{s=2}^{n} \hat{\bar{D}}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu} \right) \sigma(\rho'\rho) \sim$$

$$\sim \lim_{x_i \to v_i(\rho')-u_i(\rho')} \left(\uparrow \prod_{s=2}^{n} K^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu} \right) \sigma(\rho'\rho). \quad (4.8)$$

Здесь последнее соотношение справедливо вследствие равенства (4.6), причем предел функции (4.6) существует и не равен нулю вследствие (4.2) (как в (4.6), так и в (4.2) заменяем местами ρ и ρ'). Заметим, что коэффициент при $\sigma(\rho'\rho)$ в правой части как (4.7), так и (4.8) равен единице. Поэтому

$$o_{\rho'\rho} = c_{\rho'\rho} \, \sigma(\rho'\rho) \lim_{x_i \to v_i(\rho)-u_i(\rho)} \left(\downarrow \prod_{s=2}^{n} D^s_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}} \right), \quad (4.7a)$$

$$o_{\rho'\rho} = c_{\rho'\rho} \lim_{x_i \to v_i(\rho')-u_i(\rho')} \left(\uparrow \prod_{s=2}^{n} K^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu} \right) \sigma(\rho'\rho), \quad (4.8a)$$

где $c_{\rho'\rho}$ — численный множитель, который определим из соотношений

$$o_{\rho'\rho} \, o_{\rho\rho'} = o_{\rho'\rho'} \quad (4.10)$$

и

$$\hat{o}_{\rho'\rho} = o_{\rho\rho'}, \quad (4.11)$$

последнее из которых эквивалентно требованию ортогональности соответствующего представления группы S_n (ср. (1.1)).

Заменяя в (4.1) все элементы группы на обратные и воспользовавшись (2.8) и (3.25), имеем:

$$\hat{o}_{\rho'\rho} \sim (\widehat{o_{\rho'\rho'} X o_{\rho\rho}}) = \hat{o}_{\rho\rho} \hat{X} \hat{o}_{\rho'\rho'} = o_{\rho\rho} \hat{X} o_{\rho'\rho'} \sim o_{\rho\rho'}. \quad (4.12)$$

Таким образом, $\hat{o}_{\rho'\rho}$ может отличаться от $o_{\rho\rho'}$ только численным множителем. Поэтому (4.11) будет удовлетворено, если $c_{\rho'\rho}=c_{\rho\rho'}$. Из (4.7а) и (4.8а), имея в виду определение идемпотентов $o_{\rho\rho}$ (3.17) и элементов E (2.5), получаем:

$$o_{\rho'\rho}\,o_{\rho\rho'}=(c_{\rho'\rho})^2\lim_{x_i\to v_i(\rho')-u_i(\rho')}\left(\uparrow K^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}\downarrow\prod_{s=2}^{n}D^s_{\sigma(\rho'\rho)\bar{\nu}}\right)=$$

$$=(c_{\rho'\rho})^2\left(\prod_{s=2}^{n}d_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho')\right)^{-2}\lim_{x_i\to v_i(\rho')-u_i(\rho')}\left(\uparrow\prod_{s=2}^{n}K^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}\downarrow\prod_{s=2}^{n}D^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}\times\right.$$

$$\left.\times\uparrow\prod_{s=2}^{n}\hat{\bar{D}}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}\downarrow\prod_{s=2}^{n}\bar{D}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}\uparrow\prod_{s=2}^{n}K^s_{\sigma(\rho'\rho)\bar{\nu}}\downarrow\prod_{s=2}^{n}D^s_{\sigma(\rho'\rho)\bar{\nu}}\right)=$$

$$=\left(\frac{c_{\rho'\rho}\,n!}{f_\rho}\right)^2\left(\prod_{s=2}^{n}d^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho')\right)^{-2}o_{\rho'\rho'}\uparrow\prod_{s=2}^{n}\hat{\bar{D}}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho')\downarrow\prod_{s=2}^{n}\bar{D}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho')\,o_{\rho'\rho'}. \quad (4.13)$$

Здесь второе равенство справедливо вследствие равенства (4.6) (с заменой местами ρ и ρ'). Легко, далее, убедиться, что

$$o_{\rho'\rho'}\uparrow\prod_{s=2}^{n}\hat{\bar{D}}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho')\downarrow\prod_{s=2}^{n}\bar{D}^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho')\,o_{\rho'\rho'}=\left(\prod_{s=2}^{n}d^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho')\right)o_{\rho'\rho'}. \quad (4.14)$$

Действительно, подставляя в равенство $o_{\rho\rho}\,o_{\rho\rho}=o_{\rho\rho}$ (ср. (3.18)) выражения $o_{\rho\rho}$ через $o_{\rho'\rho'}$, полученные из (4.3) заменой местами ρ и ρ', воспользовавшись (3.19) и сравнивая коэффициенты в полученном равенстве, имеем (4.14). Из (4.13) и (4.14) следует, что (4.10) будет удовлетворено, если

$$c_{\rho'\rho}=\pm\frac{f_\rho}{n!}\sqrt{\prod_{s=2}^{n}d_{\sigma(\rho'\rho)\nu}(\rho')}\,. \quad (4.15)$$

Будем считать $c_{\rho'\rho}$ при любых ρ и ρ' положительным. Легко проверить, что такой выбор фазовых множителей не противоречит равенству (1.2). Таким образом, окончательно имеем следующее (ср. (4.8а) и (4.15)).

Элементы простых матричных подалгебр (операторы Юнга) симметрической группы S_n, соответствующие ортогональным представлениям, приведенным относительно цепочки подгрупп (1.3), *равны*

$$O_{\rho'\rho}=\frac{f_\rho}{n!}\lim_{x_i\to v_i(\rho')-u_i(\rho')}\left(\sqrt{\prod_{s=2}^{n}d^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}[x_1,x_2,\ldots,x_s]}\times\right.$$

$$\left.\times\uparrow\prod_{s=2}^{n}K^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}[x_1,x_2,\ldots,x_s]\right)\sigma(\rho'\rho), \quad (4.16)$$

где $v_i(\rho')$ и $u_i(\rho')$ — номера, соответственно, колонны и строки клетки с символом i ($i=1,2,\ldots,n$) в стандартной таблице $T^n(\rho')$, а f_ρ — размерность данного представления.

В заключение проиллюстрируем (4.16) конкретным примером, построив элемент $o_{\rho'\rho}$ группы S_6 для стандартных таблиц

$$T^6(\rho') \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{и} \quad T^6(\rho) \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Таблицу $T^6(\rho)$ в $T^6(\rho')$ переводит перестановка $\sigma(\rho'\rho)=(24)\ (365)$. Подействовав перестановкой $\sigma(\rho'\rho)$, из натурального расположения символов $I_\nu \to 123456$ получаем расположение $I_{\sigma(\rho'\rho)\nu} \to 146235$. Расположению $I_{\sigma(\rho'\rho)\nu}$ соответствуют (ср. раздел 2):

$$\prod_{s=2}^{6} K^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}[x_1, x_2, \ldots, x_s] = p_{21}p_{31}p_{32}p_{41}p_{51}p_{54}p_{52}p_{53}p_{61}p_{64}$$

и

$$\prod_{s=2}^{6} d^s_{\sigma(\rho'\rho)\nu}[x_1, x_2, \ldots, x_s] = d_{42}\,d_{43}\,d_{62}\,d_{63}\,d_{65},$$

где p_{sr} — элементы (2.1), а $d_{sr}=[1-1/(x_s-x_r)^2]$. Так как размерность данного представления $f_\rho=16$ (§ 3, гл. IV. [2]), имеем:

$$o_{\rho'\rho} = \frac{16}{6!}\lim\left(\sqrt{d_{42}\,d_{43}\,d_{62}\,d_{63}\,d_{65}}\cdot p_{21}p_{31}p_{32}p_{41}p_{51}p_{54}p_{52}p_{53}p_{61}p_{64}\right)$$

при

$$x_1 \to 0, \quad x_2 \to 1, \quad x_3 \to 2, \quad x_4 \to -1, \quad x_s \to 0, \quad x_6 \to -2.$$

Вильнюсский филиал Каунасского
Политехнического института

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Вейль, Классические группы. Их инварианты и представления, ИИЛ, Москва, 1947.
2. H. Boerner, Representations of groups, North-Holland publishing company, Amsterdam, 1963.
3. Young, On quantitative substitutional analysis, III, Proc. Lond. Math. Soc., **28**, 255 (1928); IV, Proc. Lond. Math. Soc., **31**, 253 (1930a); V, Proc. Lond. Math. Soc., **31**, 273 (1930b); VI, Proc. Lond. Math. Soc., **34**, 196 (1932); VII, Proc. Lond. Math. Soc., **36**, 304 (1933); VIII, Proc. Lond. Math. Soc., **37**, 441 (1934).
4. R. M. Thrall, Duke Math. J., **8**, 611 (1941).
5. D. E. Rutherford, Substitutional analysis, Edinburgh, 1948.

SIMETRINIŲ GRUPIŲ JUNGO OPERATORIAI

ALG. JUCYS

Reziumė

Tirti simetrinės grupės S_n grupinės algebros paprastų matricinių poalgebrių elementai (Jungo operatoriai), atitinkantieji ortogonalius grupės atvaizdavimus, redukuotus pogrupių sekos (1.3) atžvilgiu. Rasta bendra formulė (3.30) primityviems idempotentams. Remiantis ta formule, gautos kompaktinės išraiškos nediagonaliesiems matricinių poalgebrių elementams.

Kauno Politechnikos instituto
Vilniaus filialas

ON THE YOUNG OPERATORS OF THE SYMMETRIC GROUPS

ALG. JUCYS

Summary

The elements of the simple matrix sub-algebras of the symmetric group S_n group-algebra, corresponding to the orthogonal representations reduced with respect to the set of the subgroups (1.3) (Young operators of the "orthogonal" representation), are considered. To the primitive idempotents the explicit expression (3.30) is obtained. On the basis of this formula the compact expressions for the non-diagonal elements of the matrix sub-algebras are obtained.

The Vilnius branch
of the Polytechnic Institute of Kaunas