XVII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1976

УДК 519.1

ЧИСЛО СИММЕТРИЧЕСКИХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ С ЗАДАННЫМИ СУММАМИ ЭЛЕМЕНТОВ В СТРОКАХ

А.-А. А. Юцис

В серии работ, начатой Л. Карлитцем [1–6], решаются частные варианты следующей общей комбинаторно-перечислительной задачи. Пусть $A=\|a_{ij}\|$ – симметрическая матрица порядка n, матричные элементы a_{ij} которой – натуральные числа (включая нуль). При заданных числах $d_1, d_2, \ldots, d_n$, требуется найти, сколько имеется различных матриц, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=d_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Поскольку каждая такая матрица A может интерпретироваться как матрица смежностей некоторого мультиграфа (с присутствием, в общем случае, кратных петель), рассматриваемая задача является одновременно одной из перечислительных задач теории графов и формулируется как задача перечисления помеченных мультиграфов с заданными степенями вершин. Р. Рид, однако, введя понятие „валентность" вместо „степень", решает ([7], выражение (i) на с. 830 в [8]) аналогичную задачу с заменой условий (1) на следующие:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(1+\delta_{ij})=d_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2}$$

(δ_{ij} – символ Кронекера), учитывая тем самым каждую петлю при вершине дважды.

Общее решение задачи в первом ее варианте в [1–8] не было дано. В данной заметке предлагается такое решение, опирающееся на некоторых простых положениях теории характеров групп.

Пусть $\rho=(\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_m)$, где $\sum_{i=1}^{m} i\rho_i=\sum_{j=1}^{n} d_j=m$ (ρ_i – целые неотрицательные числа). Пусть, далее, $\chi_\rho^{[\lambda]}$ – характер в неприводимом представлении $[\lambda]$ группы S_m класса эквивалентности, задаваемого циклической структурой ρ (ρ_i циклов длины i). Каждому разбиению ρ числа m поставим в соответствие произведение степенных симметрических многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (вещественных или комплексных)

$$s_\rho=\prod_{i=1}^{m}(x_1^i+x_2^i+\ldots+x_n^i)^{\rho_i}.$$

С другой же стороны, каждому неприводимому представлению $[\lambda]$ в теории характеров групп ставится в соответствие [9] симметрическая функция Шура

$$\{\lambda\}=\frac{1}{m!}\sum_{\rho} h_\rho\,\chi_\rho^{[\lambda]}\,s_\rho,$$

где суммируется по всем разбиениям ρ числа m, а h_ρ равно числу элементов группы S_m в классе эквивалентности ρ, т.е.

$$h_\rho = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{m} i^{\rho_i}(\rho_i!)}. \tag{3}$$

Пользуясь формальным разложением

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots,$$

коэффициент $c(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ при $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$ в разложении выражения

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod_{i>j}^{n}(1-x_i x_j)} \tag{4}$$

по моногенным симметрическим многочленам находим подсчетом симметрических матриц, удовлетворяющих условиям (1). Литтлвудом доказано (равенство 11.9; 6) на с. 238 в [9]), что

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod_{i>j=1}^{n}(1-x_i x_j)} = 1 + \sum_{m=1}\sum_{[\lambda]\vdash m}\{\lambda\}, \tag{5}$$

где $[\lambda]\vdash m$ означает, что $[\lambda]$ является неприводимым представлением группы S_m. Рассмотрим члены общей степени m из правой части равенства (5), т.е. выражение

$$\sum_{[\lambda]\vdash m}\{\lambda\} = \frac{1}{m!}\sum_{\rho} h_\rho s_\rho \sum_{[\lambda]\vdash m}\chi_\rho^{[\lambda]}. \tag{6}$$

Поскольку любое представление симметрической группы эквивалентно вещественному, из результатов Фробениуса следует ([10], с. 143), что $\sum_{[\lambda]\vdash m}\chi_\rho^{[\lambda]}$ равно числу решений уравнения

$$t^2 = p$$

в группе S_m при фиксированном элементе p из класса эквивалентности ρ. Если $r, t \in S_m$ — два элемента из класса эквивалентности ρ', то r^2 и t^2 опять же принадлежат одному и тому же классу ρ (в общем, отличному от ρ'). Поэтому

$$\sum_{[\lambda]\vdash m} h_\rho \chi_\rho^{[\lambda]} = \sum_{(\rho')^2=\rho} h_{\rho'} \equiv k_\rho, \tag{7}$$

где равенство $(\rho')^2 = \rho$ под знаком суммы означает, что сумма распространена на классы эквивалентности, квадраты элементов которых принадлежат классу ρ. При возведении перестановки в квадрат цикл нечетной длины дает цикл той же длины, а цикл четной длины распадается на два цикла длин, равных половине длины исходного цикла. Поэтому в (7) следует просуммировать по разбиениям ρ', удовлетворяющим

$$2\rho'_{2i} = \rho_i \text{ для четного } i$$

и

$$\rho'_i + 2\rho'_{2i} = \rho_i \text{ для нечетного } i. \tag{8}$$

Тем самым, $k_\rho \neq 0$ тогда и только тогда, если при каждом четном i и ρ_i является четным. Выражение (3) для $h_\rho{}^1$ совместно с условиями (8) дает явную расчетную формулу для k_ρ.

Из (4)–(7) получаем общее решение задачи в виде производящей функции для искомых чисел $c\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{m!} \sum_\rho k_\rho s_\rho =$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_\rho k_\rho \prod_{i=1}^{m} (x_1^i + x_2^i + \ldots + x_n^i)^{\rho_i}. \tag{9}$$

В качестве примера, при $m=5$ и $n=4$, имеем

$$F_5(x_1, x_2, \ldots, x_4) = \frac{1}{120} \{26(x_1+x_2+x_3+x_4)^5 + 40(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \times$$
$$\times (x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3) + 30(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2 +$$
$$+ 24(x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5)\},$$

откуда находим, что, в частности

$$c(2, 2, 1, 0) = 7, \quad c(2, 1, 1, 1) = 13.$$

Из (3), (8) и (9) следует, что в явном виде

$$c(d_1, d_2, \ldots, d_n) =$$

$$= \sum_{\left(\sum_{i=1}^{m} i\rho_i = m\right)} \left\{ \sum_{\substack{2 \mid i : 2\rho'_{2i} = \rho_i \\ 2 \nmid i : 2\rho'_{2i} + \rho'_i = \rho_i}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} i^{\rho'_i} (\rho'_i\,!)} \right\} \left\{ \sum_{\left(\substack{\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} = \rho_i \\ \sum_{i=1}^{m} i\beta_{ik} = d_k}\right)} \prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i\,!}{\prod_{k=1}^{n} \beta_{ik}\,!} \right\}. \tag{10}$$

Здесь β_{ik}, опять-таки, целые неотрицательные числа.

Предложенный способ вывода результата (9)–(10) не является ни единственным, ни даже самым простым. В нем, однако, подчеркнута одна из сторон связи рассматриваемой перечислительной задачи с теорией характеров групп. Относительно же самого вида решения (9)–(10) отметим следующее.

Рассмотренная задача принадлежит к довольно широкому классу комбинаторных перечислительных задач, формулируемых заданием производящей функции в виде линейной комбинации моногенных симметрических функций с искомыми коэффициентами и решаемых преобразованием производящей функции к виду линейной комбинации функций s_ρ с уже известными коэффициентами. Поскольку разложение функций s_ρ по моногенным симметрическим многочленам — одно из простейших преобразований базисов в кольце целых рациональных симметрических функций [11], такое решение является если не оптимальным, то по крайней мере явным приближением к нему. Подкласс в классе таких задач составляют решаемые на основании известной перечислительной теоремы Пойа, поскольку сама теорема является утверждением об упомянутого рода преобразовании производящей функции для определенного подкласса задач [8, с. 824; 12].

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
29.IX.1975

Литература

1. Carlitz L. Enumeration of symmetric arrays. — "Duke Math. J.", 1966, v. 33, No 4, p. 771—783.
2. Gupta H. Enumeration of symmetric matrices. — "Duke Math. J.", 1968, v. 35, No 3, p. 653—659.
3. Roselle D. P. Some remarks on the enumeration of symmetric matrices. — "Duke Math. J.", 1968, v. 35, No 3, p. 661—662.
4. Gupta H. On the enumeration of symmetric matrices. — "Duke Math. J.", 1971, v. 38, No 4, p. 709—710.
5. Grimson R. C. Some results on the enumeration of symmetric arrays. — "Duke Math. J.", 1971, v. 38, No 4, p. 711—715.
6. Carlitz L. Enumeration of symmetric arrays (II).—"Duke Math. J.", 1971, v. 38, No 4, p. 717—731.
7. Read R. C. The enumeration of locally restricted graphs (II). — "J. London Math. Soc.", 1960, v. 35, No 3, p. 344—351.
8. Read R. C. The use of S-functions in combinatorial analysis. —"Can. J. Math.", 1968, v. 20, No 4, p. 808—841.
9. Littlewood D. E. The theory of group characters and matrix representations of groups. Oxford, Clarendon Press, 1958.
10. Hamermash M. Group theory and its application to physical problems. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
11. David F. N., Kendall M. G. and Barton D. E. Symmetric function and allied tables. Cambridge, Cambridge University Press, 1966.
12. Юцис А.-А. А. Характеры групп и некоторые задачи перечисления в комбинаторном анализе. В. сб.: Тезисы докл. XVI конф. Лит. мат. общ. — „Liet. matem. rink.", 1976, т. XVI, № 2. , с. 189—190.

SVEIKŲ NENEIGIAMŲ SIMETRINIŲ MATRICŲ SU NURODYTOMIS ELEMENTŲ EILUTĖSE SUMOMIS SKAIČIUS

A. - A. A. Jucys

(*Reziumė*)

Rasta generuojančioji (9) funkcija, kurios koeficientas prie $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$ yra lygus skaičiui straipsnio pavadinime nurodyto tipo matricų su eilučių sumomis $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Daugiklis k_ρ duotoje išraiškoje lygus skaičiui tokių $m = \sum_i d_i$ simbolių perstatinių, kurių kvadratai priklauso grupės S_m ekvivalentiškumo klasei ρ.

THE NUMBER OF SYMMETRIC NON-NEGATIVE INTEGRAL MATRICES WITH PRESCRIBED ROW SUMS

A. - A. A. Jucys

(*Summary*)

The generating function (9) for the number of matrices in question is obtained. There k_ρ is equal to the number of the elements of the symmetric group on $m = \sum_i d_i$ symbols, whose squares belongs to the equivalence class ρ. The number of matrices with row sums $d_1, d_2, \ldots, d_n$ appears as the coefficient of $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$ in (9).