МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

ТУРНИРЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ТАБЛИЦЫ ЮНГА

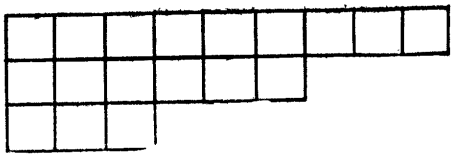
А.-А. А. Юцис

1. Кнутом в работе [1] на базе алгоритма, предложенного Шенстедом [2], построены биективные отображения множества целочисленных неотрицательных матриц и множества (0, 1)-матриц на соответствующие подмножества упорядоченных пар обобщенных таблиц Юнга. Им же рассмотрено сужéние первого из отображений на симметрические матрицы с заданным следом, приводящее к их отображению на множество обобщенных таблиц Юнга определенных схем: вследствие симметричности матрицы обе таблицы в паре совпадают, а наложение ограничения на след эквивалентно выбору таблиц только определенных схем Юнга. Бэрдж [3], видоизменив способ применения алгоритма Шенстеда, строит ряд биективных отображений различных подмножеств симметрических матриц, в том числе и (0,1)-матриц, на подмножества обобщенных таблиц Юнга. В каждом из них ограничение, налагаемое на матрицы, приводит к соответствующим ограничениям на схемы Юнга, появляющихся в отображении обобщенных таблиц.

Интерпретация целочисленной неотрицательной матрицы в качестве матрицы смежностей [4], [5] некоторого графа или мультиграфа определенного (в зависимости от наложенных ограничений) класса позволяет отнести перечисленные результаты к графотеоретическим. В настоящей заметке построено биективное отображение множества k-вершинных p-турниров на множество обобщенных таблиц одной определенной схемы Юнга. Отмечается связь с теорией представлений групп. В п. 3 доказывается

равномощность соответствующих множеств и подмножеств. Конструктивному построению отображения посвящен п. 4.

2. Введем определение некоторых понятий. Схема Юнга (или граф Феррера) $[\lambda] \equiv [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ — это изображение на плоскости разбиения целого неотрицательного числа $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Клетки в схеме Юнга (или точки в графе Феррера) располагаются в горизонтальные строки, которые в свою очередь располагаются одна под другой так, чтобы левые крайние их клетки образовали вертикальный столбец; число клеток в r-той строке, считая сверху вниз, равно λ_r. Пример схемы Юнга:

$[9, 6, 3, 0, \ldots] \Longleftrightarrow$  (1)

Обобщенная таблица Юнга схемы $[\lambda]$ строится расположением в каждой клетке схемы по одному элементу из некоторого линейно упорядоченного конечного множества K с соблюдением условий построения:

$$\left.\begin{array}{l}\text{а) неубывания в строках слева направо;}\\ \text{б) возрастания в столбцах сверху вниз.}\end{array}\right\} \qquad (2)$$

В качестве упорядоченного множества K обычно (и всюду в нижеследующем) выбирается множество $K = \{1, 2, \ldots, k\}$. В таблице контуры клеток могут быть опущены. Пример обобщенной таблицы Юнга схемы (1):

$$\begin{array}{l} 1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,2\,3 \\ 2\,2\,2\,3\,4\,4 \\ 3\,4\,4 \end{array} \qquad (3)$$

Для каждого $t \in K$ обозначим через $[\lambda]_t \equiv [\lambda_{t,1}, \lambda_{t,2}, \ldots, \lambda_{tt}]$ схему Юнга, полученную удалением в обобщенной таблице всех клеток с элементами, бо́льшими t. Схемы Юнга $[\lambda]_t$ и $[\lambda]_{t-1}$ однозначно указывают клетки схемы $[\lambda]$, занимаемые элементом t в обобщенной таблице и в свою очередь сами однозначно определены расположением элемента t в данной таблице. Во введенных обозначениях

условия построения (2) выражаются системой неравенств:

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, t\in K\ \ \forall t\geqslant r>1\ (\lambda_{t,\,r-1}\geqslant\lambda_{t,\,r}),\\ \forall\, k\geqslant t>1\ \ \forall t>r\geqslant 1\ (\lambda_{t,\,r}\geqslant\lambda_{t-1,\,r}\geqslant\lambda_{t,\,r+1}).\end{array}\right\}\qquad(4)$$

Этим устанавливается взаимно однозначное отображение между двумя множествами: множеством целочисленных неотрицательных матриц $\|\lambda_{t,r}\|$, удовлетворяющих (4), именуемых схемами Гельфанда — Цейтлина [6], и множеством обобщенных таблиц Юнга (с фиксированным K). В теории представлений групп оба множества используются при однозначной индексации базисов неприводимых представлений полной линейной группы $SL\,(k)$ [6] — [8].

3. Всюду в нижеследующем в качестве множества вершин p-турниров будет принято множество K. Матрица смежностей $A_\theta=\|a_{i,j}(\theta)\|$ p-турнира θ удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l}\forall\ i\in K\ \ (a_{i,\,i}(\theta)=0),\\ \forall\ i\neq j;\ i,\ j\in K\,(a_{i,j}(\theta)+a_{j,\,i}(\theta))=p,\end{array}\right\}\qquad(5)$$

т. е. в p-турнире каждая пара $\{i,\ j\}$ вершин соединена p дугами: $a_{i,j}(\theta)$ дуг направлены от вершины i к вершине j и $a_{j,i}(\theta)$ дуг направлены от j к i; дуги не помечены (одноцветны).

Пусть: 1) $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ — комплексные переменные, 2) $X=\|\delta_{i,j}x_i\|$ — диагональная матрица $(i,\ j\in K)$, 3) $\|b_{i,j}(\theta)\|=XA_\theta$ (матричное произведение), 4) P — множество всех p-турниров на K, 5) $C_{\langle d\rangle}$ — число p-турниров с набором полустепеней исхода $\langle d\rangle\equiv\langle d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_k\rangle$. Имеем

$$\sum\nolimits_{\theta\in P}\prod\nolimits_{i,j\in K}b_{i,\,j}(\theta)=\sum\nolimits_{\langle d\rangle}C_{\langle d\rangle}x_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_k^{d_k}=$$

$$=\prod\nolimits_{i>j;\ i,j\in K}\left(\sum\nolimits_{l=0}^{p}x_i^{p-l}x_j^{l}\right)=$$

$$=\frac{\prod_{i>j=1}^{k}(x_i^{p+1}-x_j^{p+1})}{\prod_{i>j}^{k}(x_i-x_j)}=\frac{|\,x_i^{(p+1)(k-j)}\,|}{|\,x_i^{k-j}\,|}\,.\qquad(6)$$

Здесь первое равенство — прямое следствие определений. Второе — справедливо вследствие эквивалентности суммирования по всем турнирам $\theta\in P$ независимому для каждой пары вершин перебору всех возможных

$p+1$ различных ориентаций соединяющих их дуг. Последние два равенства относятся к элементарной алгебре, однако отражают существенное для нас обстоятельство: равенство производящей функции для чисел $C_{\langle d\rangle}$ отношению двух определителей Вандермонда.

Очевидно, $\forall\ \langle d\rangle\ (\sum_{i=1}^{k} d_i = 1/2pk\ (k-1) \equiv n)$. В пространстве тензора ранга n группы $GL\ (k)$ реализуются конечномерные неприводимые представления этой группы, задаваемые схемами Юнга $[\lambda]$ с $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$. Если матрица $X' \in GL\ (k)$ диагонализируема и $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — ее собственные значения, то характер соответствующего представления равен [9]

$$\{\lambda\} \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} = \frac{|x_i^{\lambda_j+k-j}|}{|x_i^{k-j}|}. \qquad (7)$$

$\{\lambda\}$ является симметрической функцией от k переменных, именуемой функцией Шура и в отвлеченных от теории представлений групп контекстах. Из (6), (7) следует

Предложение. *Функция Шура* $\{p\ (k-1), p\ (k-2), \ldots, p, 0\}$ *является производящей функцией для чисел помеченных p-турниров на k вершинах с заданными наборами полустепеней исхода* $\langle d\rangle$.

Из [9, стр. 191, теорема IX] следует, что в разложении

$$\{p\ (k-1), p\ (k-2), \ldots, p, 0\} = \sum_{\langle d\rangle} C_{\langle d\rangle} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_k^{d_k}$$

число $C_{\langle d\rangle}$ равно числу различных обобщенных таблиц Юнга схемы $[p\ (k-1),\ p\ (k-2),\ \ldots, p]$, кратность появления в которых элемента t для каждого $t \in K$ равна d_t. Вследствие этого существует принципиальная возможность установления биективного отображения между двумя множествами, в котором наборы $\langle d\rangle$ сохраняются в виде соответствующих кратностей появления в обобщенных таблицах Юнга. Переходим к конструктивному построению такого отображения.

4. Основная составная часть алгоритмов Кнута, Бэрджа и нижеследующего — алгоритм внесения и обратный ему алгоритм удаления. В их изложении будем следовать работе [3], за строгими доказательствами отсылая к [1].

Алгоритм внесения применяется к обобщенной таблице τ и элементу $t_1 \in K$. Внесение t_1 в τ производится индуктивно: в первой строке t_1 замещает крайний левый

из элементов $t_2 > t_1$; если такого t_2 не окажется, t_1 помещается в добавляемой справа к первой строке таблицы τ новой клетке. t_2 замещает элемент $t_3 > t_2$ во второй строке или же добавляется к ней в случае отсутствия такого t_3 и так далее. Действие алгоритма заканчивается занесением некоторого t_r в добавленную к r-й строке клетку (в частном случае — добавлением к τ новой строки единичной длины с занесением в нее элемента t_r).

Алгоритм удаления обратен (см. [1]) алгоритму внесения. Заданы: таблица τ и ее строка λ_r при условии $\lambda_r > \lambda_{r+1}$. Удаляется крайняя правая клетка r-й строки, а элемент t_r, помещавшийся в ней, замещает в $(r-1)$-й строке крайний правый из элементов $t_{r-1} < t_r$. В свою очередь t_{r-1} замещает в $(r-2)$-й строке правый из элементов $t_{r-2} < t_{r-1}$ и так далее. Действие алгоритма заканчивается удалением из первой строки и тем самым из таблицы τ элемента t_1.

Примем обозначения $V(\tau, t)$, $V(\tau;\ t_1, t_2, \ldots, t_l)$ для обобщенных таблиц Юнга, построенных применением алгоритма внесения соответственно к τ, t и τ и к последовательности $t_1, t_2, \ldots, t_l$: $V(\tau;\ t_1, t_2, \ldots, t_l) = V(V(\tau;\ t_1, t_2, \ldots, t_{l-1}),\ t_l) = \ldots$. Пусть после внесения в τ элемента t_1 и элемента t_2 в $V(\tau;\ t_1)$, в добавленных к τ и к $V(\tau;\ t_1)$ клетках помещены, соответственно, элементы t_1' и t_2'. Существенно следующее утверждение:

ТЕОРЕМА Кнута [1, теорема 1]. *$t_1 \leqslant t_2$ тогда и только тогда, если в $V(\tau;\ t_1, t_2)$ элемент t_2' помещен правее или правее и выше (одновременно) элемента t_1'.*

Обобщенную таблицу Юнга, взаимно однозначно отображающую турнир θ, построим индуктивно по подтурнирам. Пусть θ_t — подтурнир, полученный удалением из $\theta \equiv \theta_k$ всех вершин $t' > t$ (совместно с инцидентными им дугами). Пусть $\tau(\theta_t)$ — обобщенная таблица, взаимно однозначно отображающая подтурнир θ_t. Алгоритм R_t дополняет $\tau(\theta_{t-1})$ до $\tau(\theta_t)$ в два шага; первый шаг — алгоритм R_{t1}, второй шаг — алгоритм R_{t2}.

Алгоритм R_{t1} состоит в применении алгоритма внесения к $\tau(\theta_{t-1})$ и к лексикографической последовательности элементов

$$S_t(\theta):\ \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{a_{1,\,t}(\theta)},\ \overbrace{2, 2, \ldots, 2 \ldots}^{a_{2,\,t}(\theta)},\ \overbrace{t-1, t-1, \ldots, t-1}^{a_{t-1,\,t}(\theta)}.$$

Результат действия R_{t1} — обобщенная таблица $V(\tau(\theta_{t-1});\ S_t(\theta))$. Из теоремы Кнута, лексикографичности $S_t(\theta)$ и обратимости алгоритма внесения следует однозначная обратимость алгоритма R_{t1}.

Алгоритм R_{t2} добавляет к таблице $V(\tau(\theta_{t-1});\ S_t(\theta))$ новые клетки до получения схемы Юнга $[p(t-1), p(t-2), \ldots p]$ и заносит в добавленные клетки элемент t. Обратимость очевидна.

Обобщенная таблица Юнга, взаимно однозначно отображающая турнир $\theta \equiv \theta_k$, строится последовательным применением алгоритмов $R_2, R_3, \ldots, R_k$. Кратность появления элемента $t \in K$ в построенной таблице равна d_t, поскольку алгоритмом R_{t2} занесено $\sum_{i=1}^{t-1} a_{t,i}(\theta)$, а каждым из алгоритмов R_{i1} с $i > t$ занесено $a_{t,i}(\theta)$ элементов t.

Замечание — пример. Алгоритмом R_2 из пустой таблицы и последовательности, состоящей из $a_{1,2}(\theta)$ элементов $1 \in K$, строится однострочная обобщенная таблица

$$\overbrace{11\ldots1}^{a_{1,2}(\theta)}\ \overbrace{22\ldots2}^{a_{2,1}(\theta)}.$$

Пример. Обобщенная таблица Юнга (3), отображающая турнир с матрицей смежностей

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0	1	2	1
2	2	0	2	3
3	1	1	0	1
4	2	0	2	0

построена описанным алгоритмом.

Институт физики
АН Литовской ССР

Поступило
29.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Knuth D. E., Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacific J. Math., **34**, № 3 (1970), 709—727.
[2] Schensted C., Longest increasing and decreasing subsequences, Canad. J. Math., **13**, № 2 (1961), 179—191.

3] Burge W. H., Four correspondences between graphs and generalized Young tableaux, J. Combinatorial Theory, Ser. A, **17**, № 1 (1974), 12—30.
[4] Харари Ф., Теория графов, М., «Мир», 1973.
[5] Берж К., Теория графов и ее применения, М., ИЛ, 1962.
[6] Гельфанд И. М., Цейтлин М. Л., Конечномерные представления группы унимодулярных матриц, Докл. АН СССР, **71**, № 5 (1950), 825—828.
[7] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., «Наука», 1970.
[8] Юцис А.-А. А., Представления симметрических групп и коэффициенты Клебша — Гордана унитарных групп, Лит. матем. сб., 8, № 3 (1968), 597—609.
[9] Littlewood D. E., The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford, 1958.