XXVII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1987

УДК 512.547.212

ЗАМЕТКА О ВНУТРЕННЕМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ ШУРА

А.-А. А. Юцис

1. Литтлвудом в [1, 2] введено и изучено внутреннее произведение функций Шура, определенное следующим образом. Пусть $\chi_{(\rho)}^{[\lambda]}$ обозначает характер класса сопряженности (ρ) в неприводимом представлении $[\lambda]$ симметрической группы S_n и пусть

$$\chi_{(\rho)}^{[\lambda]}\chi_{(\rho)}^{[\mu]}=\sum_{\nu} g_{\lambda\mu\nu}\chi_{(\rho)}^{[\nu]}. \tag{1}$$

Тогда внутреннее произведение, обозначаемое символом $\circ$, определяется так:

$$\{\lambda\}\circ\{\mu\}=\sum_{\nu} g_{\lambda\mu\nu}\{\nu\}. \tag{2}$$

Таким образом, изучение внутренних произведений функций Шура эквивалентно изучению кронекеровых произведений представлений симметрических групп. Однако введение здесь функций Шура кажется несколько искусственным. В определении (2) все функции Шура $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$, $\{\nu\}$ зависят от одних и тех же переменных. В следующем пункте настоящей заметки показано, что задача естественно формулируется в терминах теории функций Шура, если ее интерпретировать как задачу разложения функции Шура от декартова произведения двух множеств переменных по произведениям двух функций Шура от каждого из двух множеств переменных в отдельности. Новое доказательство результата Робинсона–Таулбия относительно коэффициентов $g_{\lambda\mu\nu}$, основанное на такой интерпретации, приведено в п. 3. В последнем пункте $g_{\lambda\mu\nu}$ выражены через числа целочисленных неотрицательных кубических матриц с заданными суммами матричных элементов в плоскостях.

2. Строчными греческими буквами мы обозначаем разбиения $\alpha\equiv(\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n)$ числа $n=\sum_i \alpha_i$, а также и соответствующие им диаграммы Феррера–Юнга. Той же буквой в обыкновенных, фигурных и прямых скобках обозначаем соответственно класс сопряженных элементов группы S_n, функцию Шура и неприводимое представление группы S_n, задаваемые этим разбиением. В дальнейшем мы будем указывать множества переменных в обозначениях для симметрических функций. Так, если $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_a\}$, то (ср. [3], с. 86)

$$\{\lambda\}_x\equiv\{\lambda\}(x_1, x_2, \ldots, x_a)=\frac{1}{n!}\sum_{\alpha} k_{(\alpha)}\chi_{(\alpha)}^{[\lambda]}S_{(\alpha),x}, \tag{3}$$

где

$$S_{(\alpha),\,x} \equiv S_{(\alpha)}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_a) = \prod_{i=1}^{n} (x_1^{\alpha_i} + x_2^{\alpha_i} + \ldots + x_a^{\alpha_i}).$$

В (3) $k_{(\alpha)}$ равно числу элементов в классе сопряженности (α) группы S_n. Разложением, обратным (3), является ([3], с. 86)

$$S_{(\alpha),\,x} = \sum_{\lambda} \chi_{(\alpha)}^{[\lambda]} \{\lambda\}_x. \tag{4}$$

Множество $xy = \{x_1 y_1, \ldots, x_1 y_b,\ x_2 y_1, \ldots,\ \ldots, x_a y_b\}$ является декартовым произведением двух множеств переменных $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_a\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_b\}$. Очевидно

$$S_{(\alpha),\,xy} = S_{(\alpha),\,x} S_{(\alpha),\,y}. \tag{5}$$

Из (3), (4) и (5) следует

$$\{\nu\}_{xy} = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha,\,\lambda,\,\mu} k_{(\alpha)} \chi_{(\alpha)}^{[\lambda]} \chi_{(\alpha)}^{[\mu]} \chi_{(\alpha)}^{[\nu]} \{\lambda\}_x \{\mu\}_y. \tag{6}$$

Умножая обе стороны равенства (1) на $k_{(\alpha)} \chi_{(\alpha)}^{[\nu']}$, суммируя по α и используя свойства ортогональности характеров групп, находим

$$\frac{1}{n!} \sum_{\alpha} k_{(\alpha)} \chi_{(\alpha)}^{[\lambda]} \chi_{(\alpha)}^{[\mu]} \chi_{(\alpha)}^{[\nu]} = g_{\lambda\mu\nu}. \tag{7}$$

Итак, из (6) и (7) имеем

$$\{\nu\}_{xy} = \sum_{\lambda,\,\mu} g_{\lambda\mu\nu} \{\lambda\}_x \{\mu\}_y. \tag{8}$$

Отметим, что равенство (8) может интерпретироваться как задающее разложение неприводимого характера полной линейной группы $GL(a, b)$ при ограничении соответствующего представления на подгруппу $GL(a) \times GL(b)$.

3. Пользуясь (8), получим алгоритм, эквивалентный методу Робинсона и Таулбия [1, 4], для нахождения чисел $g_{\lambda\mu\nu}$. Будем считать пары индексов произведений переменных $x_i y_j$, $x_s y_r$ из xy упорядоченными следующими соглашениями:

$$\langle i, j\rangle < \langle s, r\rangle, \quad \text{если} \quad i < s, \tag{9а}$$

$$\langle i, j\rangle \leqslant \langle i, r\rangle, \quad \text{если} \quad j \leqslant r. \tag{9б}$$

Хорошо известно [3, 5], что коэффициент при мономе $x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_a^{\varkappa_a}$ в косой функции Шура, задаваемой косой диаграммой $\alpha - \beta$ (и в обычной функции Шура, как частном случае при $\beta = 0$), равен числу косых таблиц диаграммы $\alpha - \beta$ и веса $\varkappa$, которые получаются заполнением клеток этой косой диаграммы $\varkappa_i$ числами i $(i = 1, 2, \ldots, a)$ в порядке неубывания слева направо и строгого возрастания сверху вниз в каждом столбце. С целью нахождения коэффициентов в выражении $\{\nu\}_{xy}$ будем заполнять клетки диаграммы ν парами индексов, упорядоченными в соответствии с (9).

Коэффициент $\langle \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_a \rangle_{\nu\mu}$ при $x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \ldots x_a^{\eta_a} \{\mu\}_y$ в $\{\nu\}_{xy}$ находится следующим образом. Рассмотрим те обобщенные таблицы диаграммы ν, в которых первые индексы пар $\langle i, j \rangle$ расположены одинаково, с η_i первыми индексами, равными i для каждого $i=1, 2, \ldots, a$. Пусть $\nu^{(i)} - \nu^{(i-1)}$ — косая поддиаграмма диаграммы ν, клетки которой заняты η_i парами индексов с первыми индексами, равными i. Требования для заполнения клеток косой диаграммы $\nu^{(i)} - \nu^{(i-1)}$ должны быть удовлетворены расположением вторых индексов пар (индексов при y-х) в соответствии с их упорядочением (9б). Отсюда следует, что эти таблицы вносят вклад в искомый коэффициент, равный коэффициенту при $\{\mu\}_y$ в произведении косых функций Шура $\prod_{i=1}^{n} \{\nu^{(i)} - \nu^{(i-1)}\}_y$. Суммируя вклады всех возможных расположений первых индексов (соответственно суммируя по всем возможным $\nu^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, a$) и выражая появляющиеся симметрические функции через функции Шура $\{\mu\}_y$, находим $\langle \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_a \rangle_{\nu\mu}$.

Один из способов выражения суммы произведений $\prod_{i=1}^{n} \{\nu^{(i)} - \nu^{(i-1)}\}_y$ через функции Шура, приводящий к методу Робинсона и Таулбия, следующий. По правилу Литтлвуда—Ричардсона ([5], гл. 1, § 9) разлагаем $\{\nu^{(i)} - \nu^{(i-1)}\}_y$ ($i=1, 2, \ldots, a$) в линейную комбинацию функций Шура (обыкновенных, не косых) и находим их произведения опять используя то же правило Литтлвуда—Ричардсона, находя после суммирования коэффициент $\langle \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_a \rangle_{\nu\mu}$.

В качестве последнего шага мы имеем

$$g_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\sigma \in S_a} (-1)^\sigma \langle \lambda_1 + a - \sigma(a), \lambda_2 + a - 1 - \sigma(a-1), \ldots, \lambda_a + 1 - \sigma(1) \rangle_{\nu\mu}, \tag{10}$$

где $(-1)^\sigma = +1, -1$ соответственно для четной и нечетной перестановки. Здесь мы использовали известную процедуру для разложения моногенной симметрической функции через функции Шура [3, 5].

4. Перейдем теперь к нахождению более симметричного выражения для $g_{\lambda\mu\nu}$. Введем в рассмотрение третье множество переменных $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_c\}$ и пусть xyz — их декартово произведение. Имеем

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} \prod_{k=1}^{c} (1 - x_i y_j z_k)} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} p_{\alpha\beta\gamma} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_a^{\alpha_a} y_1^{\beta_1} \times y_2^{\beta_2} \ldots y_b^{\beta_b} z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \ldots z_c^{\gamma_c} = \sum_{n=0}^{\infty} h_{n,\, xyz}. \tag{11}$$

Здесь

$$p_{\alpha\beta\gamma} \equiv p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_a \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_b \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_c}$$

равно числу целочисленных неотрицательных кубических матриц $\| M_{ijk} \|$ со следующими суммами чисел в плоскостях:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} M_{ijk}, \quad \beta_j = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{c} M_{ijk}, \quad \gamma_k = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} M_{ijk}. \tag{12}$$

Однородная симметрическая функция $h_{n,xyz}$ является функцией Шура, задаваемой разбиением, состоящим из одной части (равной n). Соответствующее представление $[n]$ группы S_n тривиальное с $\chi^{[n]}_{(\alpha)} = 1$ для всех (α). Из (7) и из свойств ортогональности характеров следует

$$g_{[n]\,\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}. \tag{13}$$

Из (8) и (13) получаем

$$h_{n,\,xyz} = \sum_{\nu} \{\nu\}_{xy} \{\nu\}_z = \sum_{\lambda,\,\mu,\,\nu} g_{\lambda\mu\nu} \{\lambda\}_x \{\mu\}_y \{\nu\}_z. \tag{14}$$

Воспользовавшись опять же известным разложением моногенных симметрических функций через функции Шура, из (11) и (14) находим

$$g_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\sigma \in S_a,\ \tau \in S_b,\ \varphi \in S_c} (-1)^{\sigma+\tau+\varphi} p_{\sigma(\lambda)\,\tau(\mu)\,\varphi(\nu)}. \tag{15}$$

Здесь использованы следующие сокращения: частями разбиения $\sigma(\lambda)$ являются $\lambda_1 + a - \sigma(a)$, $\lambda_2 + a - 1 - \sigma(a-1)$, ..., $\lambda_a + 1 - \sigma(1)$, аналогично для $\tau(\mu)$ и $\varphi(\nu)$. Числа $P_{\alpha\beta\gamma}$ легко находятся из выражения $h_{n,\,xyz}$ через произведения степенных симметрических функций

$$h_{n,\,xyz} = \frac{1}{n!} \sum_{\rho} k_{(\rho)} S_{(\rho),\,x} S_{(\rho),\,y} S_{(\rho),\,z}. \tag{16}$$

Пусть в разбиении ρ имеется $r_i(\rho)$ частей, равных i. Тогда

$$k_{(\rho)}/n! = \left(\prod_{i=1}^{n} i^{r_i(\rho)} r_i(\rho)! \right)^{-1}$$

и из (16) получаем

$$p_{\alpha\beta\gamma} = \sum \prod_{i=1}^{n} \frac{(r_i(\rho)!)^2}{i^{r_i(\rho)} \prod_{j=1}^{n} a_{ij}! \prod_{s=1}^{n} b_{is}! \prod_{r=1}^{n} c_{ir}!}. \tag{17}$$

Здесь просуммировано по параметрам, удовлетворяющим следующим равенствам:

$$\sum_{j=1}^{a} a_{ij} = \sum_{s=1}^{b} b_{is} = \sum_{r=1}^{c} c_{ir} = r_i(\rho), \quad \sum_{i=1}^{n} i r_i(\rho) = n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i a_{ij} = \alpha_j, \quad \sum_{i=1}^{n} i b_{is} = \beta_s, \quad \sum_{i=1}^{n} i c_{ir} = \gamma_r. \tag{18}$$

Литература

1. **Littlewood D. E.** The Kronecker product of symmetric group representations // J. London Math. Soc. 1956. V. 31, No 121. P. 89.
2. **Littlewood D. E.** Plethysm and the inner product of S-functions // J. London Math. Soc. 1957. V. 32, No 125. P. 18.
3. **Littlewood D. E.** The theory of group characters and matrix representations of groups. Oxford: Clarendon Press, 1958. 310 p.
4. **Robinson G. de B. and Taulbee O. E.** The reductions of the inner product of two irreducible representations of S_n // Proc. Natl. Acad. Sci. 1954. V. 40. P. 723.
5. **Макдональд И.** Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985. 222 с.

Институт физики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
30.12.1986

PASTABA VIDINĖS ŠURO FUNKCIJŲ SANDAUGOS KLAUSIMU

A. A. Jucys

(*Reziumė*)

Parodyta, kad vidinės dviejų Šuro (Schur) funkcijų sandaugos skleidimas gali būti interpretuojamas kaip dekartinės dviejų kintamųjų aibių sandaugos Šuro funkcijos skleidimas atitinkamų kintamųjų aibių Šuro funkcijų sandaugomis (žr. (8)). Skleidinio koeficientai $g_{\lambda\mu\nu}$ išreikšti sveikų neneigiamų kubinių matricų su duotomis elementų sumomis plokštumose kiekiu ((15) lygybė). Pastarajam rasti pateikta (17) formulė. Naujai, remiantis minėta interpretacija, įrodytas rezultatas iš [4].

A NOTE ON THE INNER PRODUCT OF SCHUR FUNCTIONS

A.-A. A. Jucys

(*Summary*)

Here it is shown that the problem of expansion of the inner product of two Schur functions is essentially the problem of expansion of the Schur function of Cartesian product of two sets of variables into products of Schur functions of each of the sets of variables (see (8)). Coefficients $g_{\lambda\mu\nu}$ in the expansion are expressed in terms of the numbers of integral nonnegative cubic matrices with prescribed sums of the matrix elements in the planes. For these numbers explicit formula (17) is proposed. The new proof of the Robinson–Taulbee result [4] based on the fact mentioned is presented.