УДК 519.46

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП И КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША – ГОРДАНА УНИТАРНЫХ ГРУПП

А. А. ЮЦИС

1. Введение

В связи с успехами теорий симметрии элементарных частиц, в последнее время интенсивно изучаются вопросы, связанные с вычислением характерных чисел унитарных групп (работы [1] и цитированная там литература). При этом в основном используются инфинитезимальные методы теории групп Ли. Имея, однако, в виду связь между теорией представлений унитарных групп и тоерией представлений симметрических групп [2, 3], можно надеятся, что непосредственное использование известных положений последней будет полезным при рассмотрении данного круга задач.

Целью настояшей работы и является соответствующее формулирование задачи и ее решение в конкретном частном случае редукции кронекерова произведения двух представлений, одно из которых является симметрическим. В третьем разделе с помощью операторов Юнга симметрических групп построены два ортонормированные базиса в тензорном пространстве ранга n группы U_k. Один из них является базисом приводимого (в общем случае) представления $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k]\times[l, 0, \ldots, 0]$ группы U_k, а второй служит базисом того же представления, приведенного к неприводимому виду. При этом задача нахождения матричных элементов матрицы, переводящей один базис в другой (коэффициентов Клебша—Гордана), формулируется исключительно в терминах теории представлений симметрических групп. В дальнейшем изложении мы стремимся подчеркнуть связь коэффициентов Клебша—Гордана с матрицей, приводящей к неприводимому виду представление $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k]\cdot[l, 0, \ldots, 0]$ группы S_n, являющееся внешним произведением представления $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k]$ группы S_r $\left(r=\sum_{i=1}^{k}\mu_i\right)$ и представления $[l, 0, \ldots, 0]$ группы S_l. Поэтому задача приведения упомянутого представления, которая может иметь и самостоятельное значение, решается отдельно в следующем разделе. При этом суммирование в полученном выражении для матричных элементов приводящей матрицы не появляется. В разделе 3 коэффициенты Клебша—Гордана выражаются в виде линейной комбинации этих матричных элементов. Более подробное рассмотрение появляющегося здесь суммирования мы намерены провести в последующих работах, тем более, что с подобными суммами встречаемся и в выражениях для коэффициентов Ракаха и трансформационных матриц групп U_k. В конце статьи помещен пример расчета, иллюстрирующий результаты.

2. Построение базисов неприводимых представлений в тензорном пространстве

Пусть $F(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ (сокращенно — F) — компоненты тензора ранга n группы U_k (каждый из индексов i пробегает значения от 1 до k). Действие перестановки

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1' & 2' & \ldots & n' \end{pmatrix}$$

на определенную компоненту F будем понимать как

$$sF(i_1, i_2, \ldots, i_n) = F(i_{1'}, i_{2'}, \ldots, i_{n'}). \tag{2.1}$$

Пусть, далее, $O^{\lambda}_{\rho\rho'} = \frac{f_\lambda}{n!} \sum\limits_s (\rho \mid s \mid \rho') s - f_\lambda^2$ операторов Юнга группы S_n, соответствующих неприводимому ортогональному представлению $[\lambda]$ размерности f_λ с матричными элементами $(\rho \mid s \mid \rho')$. Г. Вейлем (гл., гл. III, IV [2] и гл. V [3]) найдено, что тензоры вида $O^{\lambda}_{\rho\rho'} F$ (при фиксированных ρ и ρ' и F, принимающем все из k^n возможных значений) составляют линейное подпространство, в котором действует неприводимое представление $[\lambda]$ группы U_k (число строк в схеме Юнга $[\lambda]$ меньше $(k+1)$. В противном случае все $O^{\lambda}_{\rho\rho'} F = 0$). При этом, в тензорном пространстве имеется f_λ линейно независимых эквивалентных подпространств, соответствующих различным ρ', в которых действует то же самое представление $[\lambda]$. Из определения (2.1) следует, что, если F и F' — две компоненты, обладающие тем же набором индексов i и отличающиеся только их расположением ($F' = sF$), то

$$O^{\lambda}_{\rho\rho'} F' = O^{\lambda}_{\rho\rho'} [sF] = sO^{\lambda}_{\rho\rho'} F. \tag{2.2}$$

Воспользовавшись известными соотношениями

$$O^{\lambda}_{\rho\rho'} O^{\lambda'}_{\eta\eta'} = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\rho'\eta} O^{\lambda}_{\rho\eta'} \tag{2.3}$$

и

$$s = \sum_{\lambda, \rho'', \rho} (\rho'' \mid s \mid \rho) O^{\lambda}_{\rho''\rho}, \tag{2.4}$$

из (2.2) получаем:

$$O^{\lambda}_{\rho\rho'} F' = \sum_{\rho''} (\rho'' \mid s \mid \rho) O^{\lambda}_{\rho''\rho'} F.$$

Таким образом, условившись относительно порядка расположения индексов в F, базисные векторы рассматриваемого подпространства можем задавать указанием набора индексов i в F, т. е., весом $m = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ (m_s — число индексов $i_\delta = s$, $\sum\limits_{s=1}^{k} m_s = n$) и теми значениями ρ, для которых все $O^{\lambda}_{\rho\rho'} F$ для данного веса являются взаимно линейно независимами. Именно, условимся в дальнейшем считать индексы расположенными в $\widetilde{F}$ в неубывающем порядке, т. е. $i_\delta \geqslant i_\beta$, если $\delta > \beta$. Если, кроме того, операторы Юнга $O^{\lambda}_{\rho\rho'}$ соответствуют «ортогональному» представлению группы S_n

(ортогональному представлению, приведенному относительно цепочки подгрупп $S_n \supset S_{n-1} \supset \ldots \supset S_1$), что мы в дальнейшем и будем считать имеющим место, то построенный базис $O^{\lambda}_{\rho\rho'} \bar{F}$ является базисом представления [λ] группы U_k, приведенного относительно цепочки подгрупп $U_k \supset U_{k-1} \supset \ldots \supset U_1$. Индекс ρ (стандартная таблица Юнга) в таком случае указывает на трансформационные свойства базисного вектора относительно данных подгрупп. Действительно, пусть $O^{\mu}_{\eta\eta}(r)$ – оператор Юнга, соответствующий представлению [μ] группы $S_r \left(r = \sum_{s=1}^{p} m_s;\ p \leqslant k\right)$. Тогда, рассматривая $O^{\lambda}_{\rho\rho'} \bar{F}$ как линейную комбинацию компонент $F^{(r)}$ тензора ранга r группы U_p, из результата Г. Вейля получаем, что $O^{\mu}_{\eta\eta}(r)\ O^{\lambda}_{\rho\rho'} \bar{F}$ принадлежит подпространству, преобразующемуся по неприводимому представлению [μ] группы U_p. Однако

$$O^{\mu}_{\eta\eta}(r)\ O^{\lambda}_{\rho\rho'} \bar{F} = \delta_{\rho\eta}\ O^{\lambda}_{\rho\rho'} \bar{F}, \tag{2.5}$$

где $\delta_{\rho\eta} = 1$, если стандартная таблица η совпадает с получаемой из ρ отбрасыванием $(n-r)$ последних символов в ней, и $\delta_{\rho\eta} = 0$ в противном случае (ср. (3.27) из [4]), что и доказывает утверждение.

Рассмотрим вопрос об ортонормированности строящегося базиса. Предварительно отметим, что k^n различных компонент F являются ортонормированным базисом n-кратного прямого произведения представления [1] группы U_k. Поэтому, если линейное преобразование, соответствующее действию операторами Юнга, ортогонально, то новый базис является также ортонормированным. Однако это преобразование имеет следующий вид:

$$O^{\lambda}_{\rho\rho'} \bar{F} = \frac{f_\lambda}{n!} \sum_q \left(\sum_p (\rho \,|\, \boldsymbol{pq} \,|\, \rho') \right) \boldsymbol{q} \bar{F}, \tag{2.6}$$

где $\boldsymbol{p}$ – элемент из подгруппы $S_{m_1} \times S_{m_2} \times \ldots \times S_{m_k} \equiv S_m$ перестановок, не меняющих $\bar{F}$ (перестановок одинаковых индексов в $\bar{F}$), а $\boldsymbol{q}$ принимает по одному значению из каждого правого смежного класса S_n относительно S_m. Скалярное произведение базисных векторов, таким образом, равно:

$$\langle O^{\lambda}_{\rho\rho'} \bar{F} \,|\, O^{\lambda'}_{\eta\eta'} \bar{F} \rangle = \left(\frac{f_\lambda}{n!}\right)^2 \sum_q \sum_p (\rho \,|\, \boldsymbol{pq} \,|\, \rho') \sum_{p'} (\eta \,|\, \boldsymbol{p'q} \,|\, \eta') =$$

$$= \left(\frac{f_\lambda}{n!}\right)^2 \sum_t \sum_{q,p} (\rho \,|\, \boldsymbol{pq} \,|\, \rho') \sum_{\eta''} (\eta \,|\, t \,|\, \eta'')\, (\eta'' \,|\, \boldsymbol{pq} \,|\, \eta') =$$

$$= \frac{f_\lambda}{n!}\, \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta_{\rho'\eta'} \sum_t (\eta \,|\, \boldsymbol{t} \,|\, \rho) = \frac{f_\lambda}{n!}\, \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta_{\rho'\eta'}\, (\eta \,|\, \boldsymbol{P}_m \,|\, \rho). \tag{2.7}$$

Здесь мы воспользовались известным свойством ортогональности (равенство (1.2), [2]) применительно к ортогональному неприводимому представлению; $\boldsymbol{t}$ – элемент из подгруппы S_m, $\boldsymbol{P}_m = \prod_s \boldsymbol{P}_{m_s}$ – сумма всех ее элементов. Ниже (равенство (4.11)) найдено, что в случае, если η и ρ отличаются только перестановкой из S_m, $(\eta \,|\, \boldsymbol{P}_m \,|\, \rho) = d^m_\eta\, d^m_\rho$, где численный множитель d^m_α опреде-

ляется только стандартной таблицей $\alpha\left(d_\alpha^m = \prod_s d_\alpha^{m_s}\right.$, а $d_\alpha^{m_s}$ задается формулой (4.9)$\left.\right)$ в противном случае $(\eta \mid P_m \mid \rho) = 0$. Таким образом,

$$O^\lambda_{\rho\rho'} \bar{F} = \left(\prod_s m_s!\right)^{-1} P_m O^\lambda_{\rho\rho'} \bar{F} = \left(\prod_s m_s!\right)^{-1} \sum_{\rho''} d^m_{\rho''} d^m_\rho O^\lambda_{\rho''\rho'} \bar{F}$$

и

$$O^\lambda_{\eta\rho'} \bar{F} = \left(\prod_s m_s!\right)^{-1} P_m O^\lambda_{\eta\rho'} \bar{F} = \left(\prod_s m_s!\right)^{-1} \sum_{\rho''} d^m_{\rho''} d^m_\eta O^\lambda_{\rho''\rho'} \bar{F} \tag{2.8}$$

отличаются только численным множителем, если ρ переводится в η перестановкой из S_m. Из (2.7) и (2.8) следует, что выражения

$$\Psi^\lambda(\boldsymbol{m}, \bar{\rho}, \rho') = \frac{1}{d^m_{\bar{\rho}}} \sqrt{\frac{n!}{f_\lambda}}\, O^\lambda_{\bar{\rho}\rho'} \bar{F} \tag{2.9}$$

являются ортонормированным базисом представления $[\lambda]$ группы U_k. Здесь $\bar{\rho}$ принимает по одному (любому) значению из каждой совокупности стандартных таблиц, отличающихся только перестановками $\boldsymbol{p}$ из S_m. При этом в $\bar{\rho}$ два символа, переставляемые $\boldsymbol{p}$ из S_m, не находятся в одной и той же колонне (в противном случае $\Psi^\lambda(\boldsymbol{m}, \bar{\rho}, \rho') = 0$, что следует из (2.8), так как тогда $(\rho'' \mid P_m \mid \rho) = 0$ – см. раздел 4). Таким образом, каждое $\bar{\rho}$ в $\Psi^\lambda(\boldsymbol{m}, \bar{\rho}, \rho')$ соответствует одной определенной «стандартной таблице с повторяющимися символами» (стр. 80 [5]). Удобно поэтому задавать $\bar{\rho}$ такой таблицей с m_s символами s ($s = 1, 2, \ldots, k$), указывая индексом номер δ соответствующего $i_\delta = s$ в $\bar{F}$ (см. пример в разделе 5). «Стандартная таблица с пронумерованными повторяющимися символами $\bar{\rho}$» (ТПНС $\bar{\rho}$), как ее назовем, одновременно указывает и вес $\boldsymbol{m}$, и $\bar{\rho}$ (расположением индексов – номеров δ). Каждое $d^{m_s}_{\bar{\rho}}$ из $d^m_{\bar{\rho}}$ вычисляется по (4.9) с j и t, принимающими значения тех δ, которые нумеруют m_s одинаковых символов s в ТПНС $\bar{\rho}$.

3. Базисы представлений в тензорном пространстве и коэффициенты Клебша—Гордана

Проведенное в предыдущем разделе общее рассмотрение позволяет перейти к конкретному построению двух упомянутых во введении базисов. Пусть $O^\mu_{\eta\eta'}(r)$ и $O^\nu_{\gamma\gamma'}(l)$ – операторы Юнга «ортогонального» представления соответственно группы S_r перестановок первых r символов и группы S_l перестановок последующих l символов ($r + l = n$). Любая компонента F тензора ранга n может рассматриваться как произведение компонент $F^{(r)}$ и $F^{(l)}$ тензоров рангов r и l с весами соответственно $\boldsymbol{m}^{(r)}$ и $\boldsymbol{m}^{(l)}$ ($\boldsymbol{m}^{(r)}$ и $\boldsymbol{m}^{(l)}$ определяются наборами первых r и последующих l индексов в F). Из определенного $\bar{F}$ получим все $\bar{F}^{(r)}\bar{F}^{(l)}$, обладающие тем же $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^{(r)} + \boldsymbol{m}^{(l)}$, подействовав на $\bar{F}$ $n!/r!l!$ перестановками вида

$$s(rl) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r & r+1 & r+2 & \ldots & n \\ a(1) & a(2) & \ldots & a(r) & b(1) & b(2) & \ldots & b(l) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

с $a(\alpha) > a(\beta)$ и $b(\alpha) > b(\beta)$ при $\alpha > \beta$. При этом $s(rl)\bar{F}$ и $s'(rl)\bar{F}$ совпадают, если $s(rl)$ и $s'(rl)$ принадлежат тому же правому смежному классу относительно S_m. Поэтому из каждой совокупности таких $s(rl)$ выбираем по одному значению $\bar{s}(rl)$. Так как

$$O^{\mu}_{\eta\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\gamma\gamma'}(l)\, \bar{F}^{(r)}\, \bar{F}^{(l)} = O^{\mu}_{\eta\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\gamma\gamma'}(l)\, [\bar{s}(rl)\, \bar{F}] = \bar{s}(rl)\, O^{\mu}_{\eta\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\gamma\gamma'}(l)\, \bar{F}$$

(ср. (2.2)), имеем следующий ортонормированный базис кронекерова произведения представлений $[\mu]$ и $[\nu]$ группы U_k (ср. (2.9)):

$$\Psi^{\mu\nu}\left(m,\ s(rl),\ \bar{\eta},\ \bar{\gamma}\right) = \Psi^{\mu}(m^{(r)},\ \bar{\eta},\ \eta')\, \Psi^{\nu}(m^{(l)},\ \bar{\gamma},\ \gamma') =$$

$$= \frac{1}{d^m_{\bar{s}(rl)\bar{\eta}}\, d^m_{\bar{s}(rl)\bar{\gamma}}} \sqrt{\frac{r!\ l!}{f_\mu f_\nu}}\ \bar{s}(rl)\, O^{\mu}_{\bar{\eta}\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\bar{\gamma}\gamma'}(l)\, \bar{F}. \tag{3.2}$$

Здесь и в дальнейшем $s(rl)\alpha$ означает таблицу, получаемую из стандартной таблицы α перестановкой $s(rl)$.

Из (2.2) и (2.3) следует, что

$$O^{\mu}_{\eta'\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\gamma'\gamma'}(l)\, \Psi^{\mu\nu}\left(m,\ \bar{s}(rl),\ \bar{\eta},\ \bar{\gamma}\right) = \Psi^{\mu\nu}(m,\ \bar{s}(rl),\ \bar{\eta},\ \bar{\gamma}). \tag{3.3}$$

Выделим из f_λ эквивалентных линейно независимых базисов (2.9) базисы, обладающие свойством (3.3). Для этого подействуем на (2.9) оператором $O^{\mu}_{\eta'\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\gamma'\gamma'}(l)$:

$$O^{\mu}_{\eta'\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\gamma'\gamma'}(l)\, \Psi^{\lambda}(m,\ \bar{\rho},\ \rho') = \frac{1}{d^m_{\bar{\rho}}} \sqrt{\frac{n!}{f_\lambda}}\ O^{\lambda}_{\bar{\rho}\rho'}\, O^{\mu}_{\eta'\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\gamma'\gamma'}(l)\, \bar{F} =$$

$$= \delta_{\rho'\eta'}\, \frac{1}{d^m_{\bar{\rho}}} \sqrt{\frac{n!}{f_\lambda}}\ O^{\lambda}_{\bar{\rho}\rho'}\, O^{\nu}_{\gamma'\gamma'}(l)\, \bar{F}. \tag{3.4}$$

Здесь значение $\delta_{\rho'\eta'}$ такое же, как в (2.5) (ср. (3.27) из [4]. В дальнейшем стандартную таблицу ρ', в которой расположение первых r символов совпадает с их расположением в η', будем обозначать через $\rho'(\eta')$). Число линейно независимых базисов (3.4) (среди f_λ их, нумеруемых индексом ρ'), задается известной теоремой Литтлвуда (стр. 94 [5])*). Не решая, однако, здесь вопрос о выделении и ортонормировании этих базисов в общем случае, будем рассматривать далее частный случай $[\nu] = [l, 0, \ldots, 0]$. Для данного представления $O^{\nu}_{\gamma'\gamma'}(l) = \frac{1}{l!} P_l$, где P_l — сумма всех перестановок последних l символов. Из (2.3) и выражения (4.10) для матричного элемента P_l получаем, что в рассматриваемом случае (3.4) равно:

$$\frac{1}{l!}\, O^{\mu}_{\eta'\eta'}(r)\, P_l\, \Psi^{\lambda}(m,\ \bar{\rho},\ \rho') = \delta_{\rho'\eta'}\, \frac{1}{l!\, d^m_{\bar{\rho}}} \sqrt{\frac{n!}{f_\lambda}} \sum_{\rho''} d^l_{\rho''}\, d^l_{\rho'}\, O^{\lambda}_{\bar{\rho}\rho''}\, \bar{F} =$$

$$= \delta_{\rho'\eta'}\, \frac{d_{\rho'}}{l!} \sum_{\rho''} d^l_{\rho''}\, \Psi^{\lambda}(m,\ \bar{\rho},\ \rho''), \tag{3.5}$$

*) Отметим, что совокупность базисных векторов (3.2) получена действием на функцию полным набором линейно независимых операторов групповой алгебры S_n, имеющих вид $P_m a\, O^{\mu}_{\eta'\eta'}(r)\, O^{\nu}_{\gamma'\gamma'}(l)$ (a — любой элемент групповой алгебры). Так как векторы (3.4) получены действием на ту же функцию операторами того же вида, любой из них однозначно может быть разложен по (3.2). Число линейно независимых базисов (3.4), таким образом, показывает сколько раз появляется представление $[\lambda]$ в $[\mu] \times [\nu]$.

т. е. имеем только один линейно независимый базис, удовлетворяющий условию (3.3) (для различных ρ' в $\Psi^{\lambda}(\boldsymbol{m}, \bar{\rho}, \rho')$ (3.5) отличаются только численным множителем $d_{\rho'}$) в том случае, если все клетки в т. Юнга, дополняющие η' до ρ' лежат в различных колоннах, и ни одного в противном случае (тогда $(\rho' \mid \boldsymbol{P}_l \mid \rho'')=0$ — см. раздел 4). Так как $\Psi^{\lambda}(\boldsymbol{m}, \bar{\rho}, \rho'')$ ортонормированны и, как легко найти из (4.9), $\sum\limits_{\rho''} (d^l_{\rho''})^2 = l!$, имеем следующий нормированный базис:

$$\Psi^{\lambda}\left(\boldsymbol{m}, \bar{\rho}, \rho'(\eta')\right) = \frac{1}{d^m_{\bar{\rho}}\, d^l_{\rho'(\eta')}} \sqrt{\frac{n!}{f_\lambda\, l!}}\; \boldsymbol{O}^{\lambda}_{\bar{\rho}\rho'(\eta')}\, \boldsymbol{P}_l\, \bar{F}. \tag{3.6}$$

Таким образом, нашей дальнейшей задачей является разложение (3.6) по базисным векторам (3.2) (с $f_\nu = 1$ и $\boldsymbol{O}^{\nu}_{\gamma\gamma'}(l) = \frac{1}{l!}\boldsymbol{P}_l$ в (3.2)). Матрица $\left\|\left(\boldsymbol{m}; \bar{\rho} \mid \bar{s}(rl)\,\eta\right)\right\|$ этого разложения имеет квазидиагональный вид, при этом каждая диагональная субматрица соответствует определенному общему весу $\boldsymbol{m}$ (в обозначении матричного элемента опускаем индексы λ и μ, так как они задаются заданием ρ и $\bar{\eta}$). Каждая субматрица — это матрица ортогонального преобразования в линейном операторном пространстве (ср. сноску на стр. 601):

$$\frac{1}{d^m_{\bar{\rho}}\, d^l_{\rho'(\eta')}} \sqrt{\frac{n!}{f_\lambda\, l!}}\; \boldsymbol{P}_m\, \boldsymbol{O}^{\lambda}_{\bar{\rho}\rho'(\eta')}\, \boldsymbol{P}_l =$$

$$= \sum_{\bar{s}(rl),\, \bar{\eta}} \left(\boldsymbol{m};\ \bar{\rho} \mid \bar{s}(rl)\,\bar{\eta}\right) \frac{1}{d^m_{\bar{s}(rl)\bar{\eta}}\, d^m_{\bar{s}(rl)\bar{l}}} \sqrt{\frac{r!}{f_\mu\, l!}}\; \boldsymbol{P}_m\, \bar{s}(rl)\, \boldsymbol{O}^{\mu}_{\bar{\eta}\eta'}(r)\, \boldsymbol{P}_l. \tag{3.7}$$

В матрице разложения в случае группы U_k эта субматрица встречается по меньшей мере $k!/u!\,(k-u)!$ раз (u — число $m_s \neq 0$ в $\boldsymbol{m}$), так как для двух $\bar{F}$, отличающихся заменой одних индексов на другие (например, для $\bar{F}$ (122333) и $\bar{F}$ (133 555) в случае $k \geqslant 5$), операторы, порождающие действием на $\bar{F}$, базисные векторы с соответствующими весами, остаются теми же. Любую субматрицу легко найти, если известна субматрица $\left\|\left(\rho \mid s(rl)\,\eta\right)\right\|$, соответствующая весу $\boldsymbol{m}$ со всеми $m_s \leqslant 1$ ($s=1, \ldots, k$), которая присутствует в матрицах, приводящих к неприводимому виду представление $[\mu]\times[l]$ групп U_k с $k \geqslant n$. Действительно, упомянутая субматрица осуществляет преобразование

$$\frac{1}{d^l_{\rho'(\eta')}} \sqrt{\frac{n!}{f_\lambda\, l!}}\; \boldsymbol{O}^{\lambda}_{\rho\rho'(\eta')}\, \boldsymbol{P}_l = \sum_{s(rl),\, \eta} \left(\rho \mid s(rl)\,\eta\right) \sqrt{\frac{r!}{f_\mu\, l!}}\; s(rl)\, \boldsymbol{O}^{\mu}_{\eta\eta'}\, \boldsymbol{P}_l. \tag{3.8}$$

Умножая (3.8) слева на $\boldsymbol{P}_m$ и сравнивая с (3.7), получаем:

$$\left(\boldsymbol{m};\ \bar{\rho} \mid \bar{s}(rl)\,\bar{\eta}\right) = \frac{1}{d^m_{\bar{\rho}}} \left(\prod_{s=1}^{k} m_s^{(l)}!\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s(rl)\,\eta = p\,[\bar{s}(rl)\,\bar{\eta}]} d^m_{s(rl)\eta} \left(\rho \mid s(rl)\,\eta\right). \tag{3.9}$$

Здесь суммирование проводится по всем $s(rl)\eta$, отличающимся от $\bar{s}(rl)\bar{\eta}$ перестановками $\boldsymbol{P}$ из S_m, так как все соответствующие $1/d^m_{s(rl)\eta}\, \boldsymbol{P}_m\, s(rl)\, \boldsymbol{O}^{\mu}_{\eta\eta'} = 1/d^m_{\bar{s}(rl)\bar{\eta}}\, \boldsymbol{P}_m\, \bar{s}(rl)\, \boldsymbol{O}^{\mu}_{\bar{\eta}\eta'}$ (ср. раздел 2 и замечание под (3.1)). Кроме того, учтено, что, так как $\bar{s}(rl)\bar{l} = \bar{s}(rl)l$ состоит из одной строки, для j и t из совокупнос-

ти индексов δ, в ТПНС $\bar{s}\,(rl)l$ нумерующих m_s^l одинаковых символов s, $x_j\left(\bar{s}\,(rl)\,l\right)-x_t\left(\bar{s}\,(rl)\,l\right)=v_j\left(\bar{s}\,(rl)\,l\right)-v_t\left(\bar{s}\,(rl)\,l\right)=j-t$, и поэтому (4.9) дает (отметим, что $d^m_{s(rl)\,\alpha}=d^m_{\bar{s}(rl)\,\alpha}$ при $s\,(rl)=p\bar{s}\,(rl)$):

$$d^{m_s}_{s(rl)l}=\prod_{m_s>j>t>0}\left(1+\frac{1}{j-t}\right)^{\frac{1}{2}}=(m_s^l!)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

В следующем разделе найдено явное выражение для коэффициентов $(\rho\,|\,s\,(rl)\eta)$ в виде произведения сомножителей. Таким образом, в выражении (3.9) для коэффициентов Клебша—Гордана имеется $f_\eta(m^{(r)})\prod_{s=1}^{k} m_s!\,/m_s^{(r)}!\,m_s^l$ слагаемых ($f_\eta(m^{(r)})$ — число стандартных таблиц, отличающихся от $\bar{\eta}$ перестановки из S_m).

4. Приведение к неприводимому виду представления $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r]\cdot[l, 0, \ldots, 0]$ группы S_n

Преобразование (3.8) является разложением базиса представления $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r]\cdot[l, 0. \ldots, 0]$ группы S_n на инвариантные подпространства $[\lambda]$ (по соответствующим представлениям преобразуются операторы из (3.8) при умножении их слева на s из S_n — ср. (2.3) и (2.4)). Матрица этого преобрзования ортогональна, так как оба базиса ортонормированы. Поэтому достаточно найти матрицу обратного преобразования. Умножая обе стороны (3.8) слева на $O^\lambda_{\rho\rho}$ и справа на $O^\lambda_{\rho'(\eta')\,\rho'(\eta')}$, из (2.3), (2.4) и учитывая, что

$$\left(\rho'(\eta')\,|\,P_l\,|\,\rho'(\eta')\right)=(d^l_{\rho'(\eta')})^2$$

(ср. (4.10)), получаем:

$$d^l_{\rho'(\eta')}\sqrt{\frac{n!}{f_\lambda\,l!}}\;O^\lambda_{\rho\rho'(\eta')}=$$

$$=\sum_{s(rl),\,\eta}\left(\rho\,|\,s\,(rl)\,\eta\right)\sqrt{\frac{r!}{f_\mu\,l!}}\left(\rho\,|\,s\,(rl)\;O^\mu_{\eta\eta'}\,P_l\,|\,\rho'(\eta')\right)O^\lambda_{\rho\rho'(\eta')}. \tag{4.1}$$

Приравнивая коэффициенты в (4.1) видим, что

$$\frac{1}{d^l_{\rho'(\eta')}}\sqrt{\frac{r!\,f_\lambda}{n!\,f_\mu}}\left(\rho\,|\,s\,(rl)\;O^\mu_{\eta\eta'}\,P_l\,|\,\rho'(\eta')\right)$$

являются матричными элементами матрицы обратного к (3.8) преобразования, т. е.

$$\left(\rho\,|\,s\,(rl)\,\eta\right)=\frac{1}{d^l_{\rho'(\eta')}}\sqrt{\frac{r!\,f_\lambda}{n!\,f_\mu}}\left(\rho\,|\,s\,(rl)\;O^\mu_{\eta\eta'}\,P_l\,|\,\rho'(\eta')\right)=$$

$$=\frac{1}{d^l_{\rho'(\eta')}}\sqrt{\frac{r!\,f_\lambda}{n!\,f_\mu}}\sum_{\rho''}\left(\rho\,|\,s\,(rl)\;P_l\,|\,\rho''\right)\left(\rho''\,|\,O^\mu_{\eta\eta'}\,|\,\rho'(\eta')\right). \tag{4.2}$$

Однако $\left(\rho'' \mid O^{\mu}_{\eta\eta'} \mid \rho'(\eta')\right) = \delta_{\rho''\rho'(\eta)}$, что следует из (3.24) [4] и соотношений (2.3) и (2.4). Таким образом,

$$\left(\rho \mid s(rl)\,\eta\right) = \frac{1}{d^{l}_{\rho'(\eta)}} \sqrt{\frac{r!\,f_\lambda}{n!\,f_\mu}} \left(\rho \mid s(rl)\,\boldsymbol{P}_l \mid \rho'(\eta)\right). \tag{4.3}$$

Матричный элемент оператора $s(rl)\boldsymbol{P}_l$ — это сумма коэффициентов при перестановках из $s(rl)\boldsymbol{P}_l$ в операторе $\frac{n!}{f_\lambda}\,O^{\lambda}_{\rho\rho'}$. Эту сумму легко находим воспользовавшись выражением для операторов Юнга, полученным в работе [4]*) (равенство (4.16) в [4]). Пусть, как и в [4], $v_k(\alpha)$ и $u_k(\alpha)$ — номера, соответственно, колонны и строки клетки с символом k в стандартной таблице α. Обозначим через $\sigma(i)$ тот символ, который ставится вместо i перестановкой $\sigma(\rho\rho')$, переводящей таблицу ρ' в ρ. Искомая сумма равна:

$$\left(\rho \mid s(rl)\,\boldsymbol{P}_l \mid \rho'\right) = \lim_{x_k \to v_k(\rho) - u_k(\rho)} \prod_{\substack{i=1 \\ a(i) > \sigma(i)}} \frac{1}{x_{a(i)} - x_{\sigma(i)}} \times$$
$$\times \prod_{\substack{a(i > \sigma(q) > \sigma(i) \\ q > i}} \left(1 + \frac{1}{x_{\sigma(q)} - x_{\sigma(i)}}\right) \prod_{\substack{\sigma(j) > \sigma(t) \\ j > t > r}} \left(1 + \frac{1}{x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(t)}}\right) \times$$
$$\times \prod_{\substack{\sigma(m) > \sigma(z) \\ m < z}} \left(1 - \frac{1}{(x_{\sigma(m)} - x_{\sigma(z)})^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

при всех

$$\sigma(i) \leqslant a(i) \quad (i = 1, \ldots, r), \tag{4.5}$$

и нулю — в противном случае.

Последнее произведение в (4.4) — это выписанный в явном виде множитель $\left(\prod_{k=2}^{n} d^{k}_{\sigma(\rho\rho')\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$ из (4.16) [4]. Условиями $j > t$, $q > i$ и $a(i) > \sigma(i)$ обеспечено, что в остающемся выражении встречаются только те $1/(x_k - x_{k'})$ $(k > k' = 1, 2, \ldots, n)$, которые присутствуют и в $\uparrow \prod_{k=2}^{n} \boldsymbol{K}^{k}_{\sigma(\rho\rho')\nu}$, как коэффициенты при соответствующих транспозициях $(\boldsymbol{kk'})$ в операторах $\left(1 + (\boldsymbol{kk'})/(x_k - x_{k'})\right)$, из произведений которых составлены $\boldsymbol{K}^{k}_{\sigma(\rho\rho')\nu}$. Обязательное присутствие множителя $1/(x_{a(i)} - x_{\sigma(i)})$ для каждого $\sigma(i) < a(i)$ и условия $\sigma(q) < a(i)$ и $t > r$ для других множителей обеспечивают, что произведения множителей $1/(x_k - x_{k'})$ в (4.4) соответствуют таким и всем таким произведениям транспозиций из $\uparrow \prod_{k=2}^{n} \boldsymbol{K}^{k}_{\sigma(\rho\rho')\nu}$, которые совместно с $\sigma(\rho\rho')$ дают перестановку из $s(rl)\boldsymbol{P}_l$. Если хотя бы один $\sigma(i) > a(i)$, то ни одна из перестановок в $\uparrow \prod_{k=2}^{n} \boldsymbol{K}^{k}_{\sigma(\rho\rho')\nu}$ не принадлежит $s(rl)\boldsymbol{P}_l$, и тем самым матричный элемент тождественно равен нулю.

*) В примере к (4.16) в [4] по вине автора пропущен множитель $\sigma(\rho'\rho) = (24)$ (365).

Рассмотрение выражения (4.4) показывает, что имеют место следующие дополнительные к (4.5) условия, только при соблюдении которых $(\rho \mid s(rl)\boldsymbol{P}_l \mid \rho') \neq 0$:

$$v_{\sigma(q)}(\rho) \neq v_{\sigma(i)}(\rho), \tag{4.6}$$

$$v_{\sigma(j)}(\rho) \neq v_{\sigma(t)}(\rho), \tag{4.7}$$

т. е. ни одна пара соответствующих символов не находится в одной и той же колонне в ρ. В необходимости условий (4.6) и (4.7) убеждаемся совершенно аналогичным рассуждением. Проведем его для (4.6). Пусть имеет место обратное: для определенного i и $\sigma(q)$, удовлетворяющего указанным в (4.4) условиям, $v_{\sigma(q)}(\rho) = v_{\sigma(i)}(\rho)$. Тогда в (4.4) с необходимостью присутствует множитель $\left(1 + 1/(x_{\sigma(q')} - x_{\sigma(i)})\right)$ с символом $\sigma(q')$, находящимся в ρ непосредственно под клеткой с $\sigma(i)$ (условия $a(i) > \sigma(q') > \sigma(i)$ и $q' > i$ для этого $\sigma(q')$ выполнены вследствие стандартности таблиц ρ и ρ'), дающий в пределе нуль. Остающееся выражение имеет своим пределом конечное число, так как одновременно с каждым превращающимся в пределе в нуль множителем $(x_k - x_{\sigma(i)})$ в знаменателе этого выражения, в числителе с необходимостью присутствует сокращающийся в пределе с ним множитель $(x_{k'} - x_{\sigma(i)} + 1)$ с символом k', находящимся в ρ непосредственно слева от k (условия присутствия множителя выполненны вследствие стандартности таблиц). Таким образом, условие (4.6) необходимо.

При выполнении условий (4.6) и (4.7) из стандартности ρ следует, что в (4.4) нет ни одного $1/(x_k - x_{k'})$ с превращающимся в нуль знаменителем. Поэтому в этом случае отпадает необходимость пользования понятием предельного перехода. Обозначая $v_k(\alpha) - u_k(\alpha) = x_k(\alpha)$ и учитывая сказанное, выразим (4.4) следующим образом:

$$\left(\rho \mid s(rl)\,\boldsymbol{P}_l \mid \rho'\right) = \prod_{\substack{i=1 \\ a(i) > \sigma(i)}}^{r} \frac{1}{x_{a(i)}(\rho) - x_i(\rho')} \prod_{\substack{a(i) > \sigma(q) > \sigma(i) \\ q > i}} \left(1 + \frac{1}{x_{\sigma(q)}(\rho) - x_i(\rho')}\right) \times$$

$$\times \prod_{\substack{\sigma(i) > \sigma(z) \\ i < z}} \left(1 - \frac{1}{\left(x_{\sigma(i)}(\rho) - x_{\sigma(z)}(\rho)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{\sigma(j) > \sigma(t) \\ j > r,\ t > r}} \left(1 + \frac{1}{x_{\sigma(j)}(\rho) - x_{\sigma(t)}(\rho)}\right)^{\frac{1}{2}} d^l_{\rho'}, \tag{4.8}$$

где

$$d^l_\alpha = \prod_{r+l \geqslant j > t > r} \left(1 + \frac{1}{x_j(\alpha) - x_t(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Здесь из последнего произведения в (4.4) выделены множители с $m = i \leqslant r$ в отдельное произведение и принято во внимание, что $x_{\sigma(k)}(\rho) = x_k(\rho')$. Заметим также, что каждому

$$\left(1 + \frac{1}{\left(x_{\sigma(j)}(\rho) - x_{\sigma(t)}(\rho)\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ с } \sigma(j) > \sigma(t) \ (j > r,\ t > r)$$

из (4.8) соответствует в $d^l_{\rho'}$ множитель

$$\left(1+\frac{1}{x_{\sigma(j)}(\rho)-x_{\sigma(t)}(\rho)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad \left(1-\frac{1}{x_{\sigma(j)}(\rho)-x_{\sigma(t)}(\rho)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

в зависимости от того, $j>t$ или $j<t$.

В частном случае (4.8) дает полезную, уже использованную в предыдущих разделах формулу для матричного элемента оператора $\boldsymbol{P}_l$*). Именно, полагая $s\,(rl)=\varepsilon$ (ε — единичный элемент группы) и тем самым все $a\,(i)=i$ ($i=1,\ \ldots,\ r$), получаем:

$$(\rho\,|\,\boldsymbol{P}_l\,|\,\rho')=\prod_{\sigma(j)>\sigma(t)>r}\left(1+\frac{1}{x_{\sigma(j)}(\rho)-x_{\sigma(t)}(\rho)}\right)^{\frac{1}{2}} d^l_{\rho'}=d^l_{\rho}\,d^l_{\rho'} \tag{4.10}$$

и $(\rho\,|\,P_l\,|\,\rho')=0$ если два символа, переставляемые перестановками из $\boldsymbol{P}_l$, находятся в ρ одной колонне, а также если $\sigma\,(i)\neq i$ ($i=1,\ \ldots,\ r$). В случае $n>r+l$, вследствие приведенности рассматриваемого «ортогонального» представления относительно S_{r+l}, к условию неисчезновения матричного элемента $\sigma\,(i)=i$ ($i=1.\ \ldots,\ r$) добавилось бы условие $\sigma\,(q)=q$ для $q>r+l$. Поэтому матричный элемент $\boldsymbol{P}_m\prod\limits_s \boldsymbol{P}_{m_s}$, где каждое $\boldsymbol{P}_{m_s}$ является суммой всех перестановок m_s последовательных символов (причем ни одна из перестановок, кроме ε, не принадлежит двум различным P_{m_s}), равен:

$$(\rho\,|\,\boldsymbol{P}_m\,|\,\rho')=\prod_s d^{m_s}_{\rho}\prod_s d^{m_s}_{\rho'}\,, \tag{4.11}$$

где $d^{m_s}_{\alpha}$ задаются (4.9) с j и t, принимающими значения символов, переставляемых перестановками из $\boldsymbol{P}_{m_s}$. При этом: 1) ρ и ρ' отличаются только перестановкой из $\boldsymbol{P}_{m_s}$ и 2) $v_j\,(\rho)\neq v_t\,(\rho)$ для двух символов из того же $\boldsymbol{P}_{m_s}$; в противном случае $(\rho\,|\,\boldsymbol{P}_l\,|\,\rho')=0$.

Подставляя (4.8) в (4.3), получаем результат, который сформулируем полностью следующим образом.

Матричный элемент матрицы, приводящей к неприводимому виду представление $[\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_r]\cdot[l,\ 0,\ \ldots,\ 0]$ *группы* $S_n\left(\sum\limits_i \mu_i=r\right)$ *равен:*

$$\left(\rho\,|\,s\,(rl)\ \eta\right)=\sqrt{\frac{r!\,f_\lambda}{n!\,f_\mu}}\prod_{j>t}\left(1+\frac{1}{x_j(\rho)-x_t(\rho)}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{\substack{i=1\\ a(i)>\sigma(i)}}^{r}\frac{1}{x_{a(i)}(\rho)-x_{\sigma(i)\rho}}\times$$

$$\times\prod_{a(i)>p>\sigma(i)}\left(1+\frac{1}{x_p(\rho)-x_{\sigma(i)\rho}}\right)\prod_{q<\sigma(i)}\left(1-\frac{1}{(x_{\sigma(i)}(\rho)-x_q(\rho))^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.12}$$

где η и ρ — *стандартные таблицы схем Юнга* $[\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_r]$ и $[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \ldots,\ \lambda_{r+1}]$ $\left(\sum\limits_i \lambda_i=n\right)$; f_μ и f_λ — *размерности соответствующих представле-*

*) Матричный элемент суммы всех перестановок $l<n$ последовательных символов впервые был найден А. Юнгом и выражен через введенные им «функции таблиц» [6]. Предлагаемое выражение (4.10) является более простым и удобным.

ний; $s\,(rl)\eta$ — *таблица, получаемая из* η *перестановкой* (3.1); $\sigma\,(i)$ — *символ, находящийся в* ρ *в клетке, занимаемой в* $s\,(rl)\,\eta\,a\,(i)$; $x_k\,(\alpha)=v_k\,(\alpha)-u_k\,(\alpha)$, *где* $v_k\,(\alpha)$ — *номер колонны и* $u_k\,(\alpha)$ — *номер строки клетки с символом* k *в* α; j *и* t *пробегают значения символов из клеток в* ρ, *дополняющих* η *до* ρ, *а* p *и* q, *кроме тех значений, принимают и значения символов из клеток* ρ, *в которых в* $s\,(rl)\,\eta$ *находятся символы, бо́льшие* $a\,(i)$.

При этом соблюдаются условия $\sigma\,(i)\leqslant a\,(i)$, $v_p\,(\rho)\neq v_{\sigma(i)}(\rho)$, $v_j\,(\rho)\neq \neq v_j\,(\rho)$. В *противном случае матричный элемент равен нулю.*

Отметим, что в расчетном отношении, но не в отношении компактности алгебраического формулирования, (4.12) может быть несколько упрощено, так как в общем случае в числителе и знаменателе (4.12) появляются сокращающиеся множители.

5. Примеры

Стандартная таблица с пронумерованными повторяющимися символами (раздел 2)

$$\text{ТПНС}\ \bar\rho\ \to\ \begin{array}{llll} 2_1 & 2_2 & 3_3 & 3_4 \\ 3_5 & 5_6 & 6_8 & \\ 6_7 & & & \end{array}$$

задает базисный вектор (2.9) в случае группы U_k с $k\geqslant 6$. При этом оператор $O^{\lambda}_{\bar\rho\rho'}$ соответствует таблице

$$\bar\rho\to\ \begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & \\ 7 & & & \end{array};$$

вес $m=(0,2,3,0,1,2,0,\ \ldots,\ 0)$. Множитель $d^m_{\bar\rho}$, согласно (4.11) и (4.9), равен:

$$d^m_{\bar\rho}=\left(1+\frac{1}{x_2(\bar\rho)-x_1(\bar\rho)}\right)^{\frac12}\left(1+\frac{1}{x_4(\bar\rho)-x_3(\bar\rho)}\right)^{\frac12}\left(1+\frac{1}{x_5(\bar\rho)-x_3(\bar\rho)}\right)^{\frac12}\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{x_5(\bar\rho)-x_4(\bar\rho)}\right)^{\frac12}\left(1+\frac{1}{x_8(\bar\rho)-x_7(\bar\rho)}\right)^{\frac12}=$$
$$=\left(2\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)^{\frac12}=\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac12}. \tag{5.1}$$

Таблицы (раздел 3)

$$\text{ТПНС}\ \bar s\,(rl)\,\bar\eta\to\begin{array}{llll} 2_1 & 5_6 & 6_7 & \\ & & 6_8 & \end{array}\quad\text{и}\quad \text{ТПНС}\ \bar s\,(rl)\,l\to\begin{array}{llll} 2_2 & 3_3 & 3_4 & 3_5 \end{array}$$

задают базисный вектор (3.2) с тем же общим m и $m^{(r)}=(0,1,0,0,1,2,0,\ \ldots,0)$, $m^{(l)}=(0,1,3,0,\ \ldots,\ 0)$, перестановкой

$$\bar s\,(rl)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

и таблицами

$$\bar\eta\to\begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \\ 4 & & \end{array},\quad l\to\begin{array}{llll} 5 & 6 & 7 & 8 \end{array},\quad \bar s\,(rl)\bar\eta\to\begin{array}{lll} 1 & 6 & 7 \\ 8 & & \end{array},\quad \bar s\,(rl)l\to\begin{array}{llll} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}.$$

Приведем пример выражения коэффициента Клебша—Гордана $(m;\ \rho\ |\ \bar{s}\ (rl)\ \bar{\eta})$, согласно (3.9), через коэффициенты $(\rho\ |\ s\ (rl)\ \eta)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2_1 & 2_2 & 3_3 & 3_4 & 2_1 & 5_6 & 6_7 \\ 3_5 & 5_6 & 6_8 & & 6_8 & & \\ 6_7 & & & & & & \end{array}\right) = \frac{3}{2}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & & 8 & & \\ 7 & & & & & & \end{array}\right) + \right.$$

$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & & 8 & & \\ 7 & & & & & & \end{array}\right) + \sqrt{\frac{4}{3}}\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & & 7 & & \\ 7 & & & & & & \end{array}\right) +$$

$$\left. +\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & & 7 & & \\ 7 & & & & & & \end{array}\right)\right]. \tag{5.2}$$

Здесь подставлено $m_2^{(l)}=1$, $m_3^{(l)}=3$, $d_{\bar{\rho}}^{m}$ из (5.1),

$$d^{m}_{s\,(rl)\,\eta} = \left(1+\frac{1}{x_8\big(s\,(rl)\,\eta\big)-x_7\big(s\,(rl)\,\eta\big)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для первых двух и $d^{m}_{s\,(rl)\,\eta} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ для последних двух слагаемых.

Коэффициенты $(\rho\ |\ s\ (rl)\ \eta)$ вычисляем по (4.12). Первые два из них в (5.2) равны нулю, так как неудовлетворено условие неисчезновения $v_p(\rho)$ $v_{\sigma(i)}(\rho)$ для $a(i)=8$ и $8>p=7>\sigma(i)=5$. Для третьего получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & & 7 & & \\ 7 & & & & & & \end{array}\right) = \sqrt{\frac{4!\,70}{8!\,3}}\left(\frac{16}{45}\right)^{\frac{1}{2}}\left((-1)\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\left((-1)\cdot 2\right)\times$$

$$\times\left((-1)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}},$$

где в скобках содержатся: 1) только от ρ зависящее произведение

$$\prod_{j>t}\left(1+\frac{1}{x_j(\rho)-x_t(\rho)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

2) три произведения

$$\frac{1}{x_{a(i)}(\rho)-x_{\sigma(i)}(\rho)}\prod_{a(i)<p<\sigma(i)}\left(1+\frac{1}{x_p(\rho)-x_{\sigma(i)}(\rho)}\right)$$

соответственно с $a(i)=6,\ 7,\ 8$ $(i=2,\ 3,\ 4)$ и 3)

$$\prod_{q<\sigma(i)}\left(1-\frac{1}{\big(x_{\sigma(i)}(\rho)-x_q(\rho)\big)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{1}{\big(x_5(\rho)-x_3(\rho)\big)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{\big(x_5(\rho)-x_4(\rho)\big)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично вычислив последний коэффициент $(\rho\,|\,s\,(rl)\,\eta)$, для коэффициента Клебша—Гордана (5.2) получаем значение $-1/2$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
31. I. 1968

Литература

1. L. C. Biedenharn, A. Giovannini, J. D. Louck, Canonical Definition of Wigner Coefficients in U_n, J. Math. Phys., 8, №. 4 (1967), 691; M. Resnikoff, General Coupling Coefficients for the Group SU (3), J. Math. Phys., 8, № 1 (1967), 63; M. Resnikoff, Recoupling Coefficients for the Group SU (3), J. Math. Phys., 8, № 1 (1967), 79.
2. Г. Вейль, Классические группы. Их инварианты и представления, ИИЛ, Москва, 1947.
3. H. Weyl, The theory of groups and quantum mechanics, Dover publications, INC., NewYork, 1931.
4. А. А. Юцис, Об операторах Юнга симметрических групп, Liet. fiz. rinkinys, VI, Nr. 2 (1966), 163.
5. D. E. Littlewood, The theory of group characters and matrix representations of groups Clarendon Press, Oxford, 1958.
6. A. Young, Quantitative substitutional analysis, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 37 (1934), 441.

SIMETRINIŲ GRUPIŲ ATVAIZDAVIMAI IR UNITARINIŲ GRUPIŲ KLEBŠO — GORDANO KOEFICIENTAI

A. JUCYS

(*Reziumė*)

Siūlomas klausimų, susijusių su unitarinių grupių Klebšo—Gordano koeficientų skaičiavimu, sprendimo būdas, įgalinantis tiesiogiai pasinaudoti simetrinių grupių atvaizdavimų teorijos pasiekimais. Tirtas U_k grupės atvaizdavimo $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k] \times [l, 0, \ldots, 0]$ redukcijos klausimas. Atitinkami Klebšo—Gordano koeficientai išreikšti tiesine kombinacija matricinių elementų matricos, redukuojančios simetrinės grupės $S_n\left(n = \sum_i \mu_i + l\right)$ atvaizdavimą $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k] \cdot [l, 0, \ldots, 0]$. Pastariesiems skaičiuoti gauta kompaktinė išraiška, kurioje nėra sumavimų.

REPRESENTATIONS OF THE SYMMETRIC GROUPS AND THE CLEBSCH—GORDAN COEFFICIENTS OF THE UNITARY GROUPS

A. JUCYS

(*Summary*)

A method of calculation of the Clebsch—Gordan coefficients of the unitary groups enabling to make use of the results of the theory of representations of symmetric groups is proposed. The problem of the reduction of the representation $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k] \times [l, 0, \ldots, 0]$ of the unitary group U_k is considered. The corresponding Clebsch—Gordan coefficients are expressed in terms of linear combination of the matrix elements which reduces the representation $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k] \cdot [l, 0, \ldots, 0]$ of the symmetric group $S_n\left(n = \sum_i \mu_i + l\right)$. For the calculation of the last ones the compact expression containing no summation parameter has been obtained.