ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ В ФАКТОР-КОЛЬЦЕ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ ПО СИММЕТРИЧЕСКИМ МНОГОЧЛЕНАМ

А.-А.А. КЦИС

Пусть $K \equiv \overline{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ - кольцо многочленов от n переменных над полем $\overline{K}$ характеристики 0 и пусть $\mathfrak{J}$ - идеал кольца K, порожденный симметрическими многочленами. Полную однородную симметрическую функцию степени t от переменных $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ обозначим через $h_{t,r}$.

Теорема 1. Совокупность из n функций $h_{1,1}, h_{2,2}, \ldots, h_{n,n}$ является базисом идеала $\mathfrak{J}$.

Теорема 2. Множество из $n!$ одночленов вида

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \qquad (i_s = 0, 1, \ldots, s-1) \tag{1}$$

является базисом фактор-кольца $K/\mathfrak{J}$.

Теорема 2 является прямым следствием теоремы 1.

Симметрическая группа S_n действует в K и в $K/\mathfrak{J}$ перестановками переменных. Пусть $[\lambda] \equiv [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$ - схема Юнга, задающая неприводимое представление группы S_n и пусть $p_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i$ ($p_0 \equiv 0$).

Теорема 3. S_n-модуль в фактор-кольце $K/\mathfrak{J}$, порожденный одночленом

$$\prod_{j=1}^{m} \prod_{i=0}^{\lambda_j - 1} x_{p_j - i}^{p_{j-1}}, \tag{2}$$

неприводим и соответствует представлению $[\lambda]$.

Доказательство. Производящей функцией для кратностей $C_l^{[\lambda]}$ представлений $[\lambda]$ группы S_n в подпространстве многочленов степени $\sum_{s=1}^{n} i_s = l$ пространства с базисом (1) является функция (см. [1 - 3] и цитированную там литературу)

$$P_\lambda = \sum_{\ell=1}^{q} C_\ell^{[\lambda]} y^\ell = \prod_{k=1}^{n} \frac{y^{f(k)}(1-y^k)}{1-y^{h(k)}}. \quad (3)$$

Здесь $h(k)$ - длина крюка k-той клетки схемы Юнга $[\lambda]$ в заданной их нумерации и $f(k)$ - длина ноги этого крюка. Из выражения на правой стороне равенства (3) следует, что степень старшего члена в P_λ равна

$$q = \frac{1}{2}\left(n(n+1) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\lambda_i+1)\right) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j . \quad (4)$$

Степень одночлена (2) также равна q и из (3) следует, что $C_q = 1$. Так как подгруппа Юнга $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots \times S_{\lambda_m}$ является стабилизатором базисного элемента (2) и поскольку представление $[\lambda]$ в представлении группы S_n, индуцированном тривиальным представлением подгруппы S_λ, появляется также однократно, этим завершается доказательство теоремы 3.

Литература

1. Кириллов А.А. О тождествах в алгебре Ли гамильтоновых векторных полей на плоскости // Препринт № 121 / Институт прикладной математики АН СССР, Москва, 1983.

2. Кириллов А.А. О полиномиальных ковариантах симметрической группы и некоторых ее аналогов // Функц. анализ 1984. Т. 18, вып. 1, С. 74 - 75.

3. Юцис А.-А.А. Задача, обобщающая задачу перечисления разбиений. Кратности представлений симметрических групп // Лит. физ. сб. 1986. Т. 26, № 5. С. 513 - 528.