

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП И МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УНИТАРНЫХ ГРУПП

Алг. Юцис

(Поступило 28.II.1969)

Найдена матрица перехода от схемы приведения $(([\lambda_1] \times [l_2]) [\lambda_{12}] \times [l_3]) [\lambda]$ к схеме приведения $(([\lambda_1] \times [l_3]) [\lambda_{13}] \times [l_2]) [\lambda]$ кронекерова произведения представлений $[\lambda_1] \times [l_2] \times [l_3]$, где $[l_2]$ и $[l_3]$ – симметричные представления, а $[\lambda_1]$ – любое представление группы U_k . Получено соотношение симметрии, являющееся обобщением известного свойства симметрии Редже коэффициентов Ра-каха группы U_2 .

1. Введение

Матрицей преобразования в физической литературе принято называть матрицу перехода от одного способа приведения („способа связи“) кронекерова произведения нескольких неприводимых представлений определенной группы к некоторому другому способу приведения. Различные матрицы преобразования группы U_2 детально исследованы в [1]. Частные случаи матриц преобразования типа, указанного в резюме к настоящей работе, рассматриваются в работах [2, 3, 4, 5]. Во всех этих работах авторы ограничиваются группой U_3 , тем самым получая формулы для расчета матричных элементов матриц преобразования любой группы U_k , однако только матриц, соответствующих представлениям, задаваемым схемами Юнга с не более чем тремя строками. При возрастании числа строк в схемах Юнга становится, по-видимому, нецелесообразным вывод каждый раз новых формул ограниченного применения, тем более, что сами формулы становятся громоздкими, резко возрастает число параметров суммирования в них. Желательно поэтому иметь выражения, сформулированные в виде, пригодном в случае наличия любых схем Юнга среди

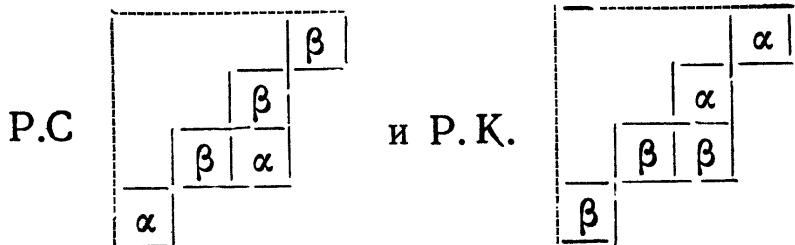
схем, задающих матрицу преобразования. Именно при решении задач такого рода, наиболее адекватным, согласно нашему мнению, является подход, опирающийся на непосредственное использование результатов теории представлений симметрических групп. В работе [6] на этой основе решалась задача нахождения коэффициентов Клебша – Гордана унитарных групп. Как и в [6], в настоящей работе ограничиваемся невырожденным случаем, не затрагивая вопросов, связанных с выбором способа однозначного выделения повторяющихся неприводимых представлений. Обозначения в данной работе, отчасти являющейся продолжением работы [6], в основном совпадают с обозначениями в последней, однако результаты формулируются в полной независимости от [6].

В разделе 2 настоящей работы матричный элемент матрицы преобразования $\left(\left((\lambda_1) \times [l_3] \right) [\lambda_{13}] \times [l_2] \right) [\lambda] \mid \left(\left((\lambda_1) \times [l_2] \right) [\lambda_{12}] \times [l_3] \right) [\lambda] \right)$, где $[l_2]$ и $[l_3]$ – симметричные представления, выражен через диагональный матричный элемент $F(x_i - x_k)$ определенного перестановочного выражения в соответствующем представлении группы S_n . $F(x_i - x_k)$ является одновременно матричным элементом матрицы преобразования рассматриваемого в работе типа с $l' = l'_2 = l'_3 \leq \min(l_2, l_3)$. Правило составления алгебраического выражения для $F(x_i - x_k)$ в общем случае дано в разделе 4. В разделе 3 рассмотрено соотношение симметрии матриц преобразования, в частном случае приводящее к симметрии Редже для коэффициентов Ракаха.

2. Матрица преобразования

Матрицу перехода от способа связи $\left((\lambda_1) \times [l_2] \right) [\lambda_{12}] \times [l_3] \right) [\lambda]$ к способу связи $\left((\lambda_1) \times [l_3] \right) [\lambda_{13}] \times [l_2] \right) [\lambda]$ с симметричными $[l_2]$ и $[l_3]$ удобно задавать косо-схемой Юнга ($[\lambda] - [\lambda_1]$) (*skew diagram* в [7]), а ее матричные элементы – двумя расположениями в клетках этой схемы l_2 символов α и l_3 символов β . Строки матрицы задают расположения (Р. С.), в которых все β находятся в каждой строке и каждом столбце косо-схемы соответственно левее и выше α , а колонны матрицы – расположения (Р. К.) с обратным порядком следования символов β и α в строках и столбцах схемы. При этом допускаются только расположения, не содержащие двух одинаковых символов в одном и том же столбце (в согласии с тем, что косо-схемы, задающие матрицы рассматриваемого

типа, в одном столбце могут иметь не более двух клеток). Например, матричный элемент $\left(\left([321] \times [3] \right) [432] \times [2] \right) [4331] \left| \left(\left([321] \times [2] \right) [431] \times [3] \right) [4331] \right)$ задается расположениями



Ниже покажем, что справедливо следующее предложение.

Матричный элемент матрицы преобразования равен

$$\prod_{i,j} \left(1 + \frac{1}{x_i - x_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j,k} \left(1 + \frac{1}{x_j - x_k} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i,l} \left(1 + \frac{1}{x_i - x_l} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{l,k} \left(1 + \frac{1}{x_l - x_k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \prod_{j,l} \left(1 - \frac{1}{(x_j - x_l)^2} \right)^{\frac{1}{2}} F(x_i - x_k), \quad (2.1)$$

где индексы пробегают значения номеров клеток в косо-схеме (в произвольной фиксированной нумерации), при этом $i; j; k; l$ – соответственно номера тех клеток, в которых в Р. С. и в Р. К. соответственно находятся символы $\alpha, \beta; \alpha, \alpha; \beta, \alpha; \beta, \beta$. x_p – „координата“ p -той клетки в косо-схеме (разность номеров столбца и строки клетки в полной схеме Юнга $[\lambda]$). $F(x_i - x_k)$ – сумма коэффициентов при всех перестановках, ставящих вместо каждого из i одно из k в перестановочном выражении

$$\prod_i \uparrow \prod_k \left(\varepsilon + \frac{(ik)}{x_i - x_k} \right). \quad (2.2)$$

Здесь (ik) – транспозиция чисел i и k ; стрелкой отмечено, что произведение по k берется в одинаковом для всех i порядке; ε – единичная перестановка

С целью доказательства построим с помощью операторов Юнга группы S_n в тензорном пространстве группы U_k базисы неприводимых представлений $[\lambda]$, соответствующие двум рассматриваемым способам связи. Общее рассмотрение построения базисов представлений группы U_k в тензорном пространстве проведено в работе [6], данными которой здесь и воспользуемся. Способу связи $(([\lambda_1] \times [l_2]) [\lambda_{12}] \times [l_3]) [\lambda]$ соответствуют базисы

$$\Psi(\lambda_{12}) = \left(\rho'(\eta) | P^{l_2} P^{l_3} | \rho'(\eta) \right)^{-\frac{1}{2}} O_{\rho, \rho'(\eta)}^{\lambda} P^{l_2} P^{l_3} \bar{F} \quad (2.3)$$

и способу связи $\left(([\lambda_1] \times [l_3]) [\lambda_{13}] \times [l_2] \right) [\lambda]$ соответствуют

$$\Psi(\lambda_{13}) = \left(\rho''(\eta) \mid s P^{l_2} P^{l_3} s^{-1} \mid \rho''(\eta) \right)^{-\frac{1}{2}} O_{\rho, \rho''(\eta)}^{\lambda} s P^{l_2} P^{l_3} \bar{F}, \quad (2.4)$$

где перестановка s меняет порядок следования символов $r+1, r+2, \dots, n$ на обратный, т. е.:

$$s = (r+1, n) (r+2, n-1) (r+3, n-2) \dots .$$

Здесь, как и в [6], $O_{\alpha\alpha}^{\lambda}$ – операторы Юнга группы S_n ($n=r+l_2+l_3$, где r – число клеток в $[\lambda_1]$), соответствующие „ортогональному“ [8, 9] неприводимому представлению $[\lambda]$; P^{l_2} и P^{l_3} – суммы соответственно всех перестановок символов $r+1, \dots, r+l_2$ и $r+l_2+1, \dots, n$; $\rho(\eta)$ – стандартная таблица схемы $[\lambda]$, в которой расположение первых r символов совпадает с их расположением в стандартной таблице η схемы $[\lambda_1]$; $(\alpha \mid P^{l_2} P^{l_3} \mid \alpha)$ – матричный элемент $P^{l_2} P^{l_3}$ в неприводимом представлении. Несущественные для дальнейшего общие для (2.3) и (2.4) сомножители в нормирующих множителях опущены.

Так как (2.3) не изменяется при замене $\rho'(\eta)$ на стандартную таблицу, отличающуюся перестановками из P^{l_2} и P^{l_3} и соблюдено условие отсутствия двух символов, переставляемых этими перестановками, в одном столбце [6], (2.3) может быть задано расположением Р.К.. (2.4) задается Р.С., так как для $\rho''(\eta)$ справедливо аналогичное для перестановок из $sP^{l_2}s^{-1}$ и $sP^{l_3}s^{-1}$. При этом $[\lambda_{12}]$ и $[\lambda_{13}]$ – схемы, получаемые отбрасыванием клеток с последними l_3 и l_2 символами соответственно в $\rho'(\eta)$ и $\rho''(\eta)$ (т. е., клеток соответственно с β в Р.К. и α в Р.С.).

То обстоятельство, что (2.3) и (2.4) действительно являются необходимыми нам базисами, следует из

$$\frac{1}{l_2! l_3!} O_{\eta\eta}^{\lambda} P^{l_2} P^{l_3} \Psi(\lambda_{12}) = \Psi(\lambda_{12}), \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{l_2! l_3!} O_{\eta\eta}^{\lambda} P^{l_2} P^{l_3} \Psi(\lambda_{13}) = \Psi(\lambda_{13}), \quad (2.6)$$

$$\varepsilon^{\lambda_{12}} \Psi(\lambda_{12}) = \Psi(\lambda_{12}), \quad (2.7)$$

$$\varepsilon^{\lambda_{13}} \Psi(\lambda_{13}) = \Psi(\lambda_{13}), \quad (2.8)$$

где $O_{\eta\eta}^{\lambda_1}$ – оператор Юнга подгруппы S_r перестановок первых r символов, $\varepsilon^{\lambda_{12}}$ и $\varepsilon^{\lambda_{13}}$ – идемпотентные элементы центра группового кольца подгрупп перестановок первых $r+l_2$ и первых r и последних l_3 символов, соответ-

ствующие неприводимым представлениям $[\lambda_{12}]$ и $[\lambda_{13}]$. Отметим, что действие перестановки на компоненту тензора F считаем определенным как и в работе [6] (равенство (2.1) в [6]), так что для двух перестановочных выражений A и B $A(BF)=(BA)F$. (2.5) – (2.8) следуют из известных правил умножения элементов группового кольца [8, 9]. (2.5) и (2.6) обеспечивают возможность разложения (2.3) и (2.4) по базису представления $[\lambda_1] \times [l_2] \times [l_3]$, а (2.7) и (2.8) – возможность разложения (2.3) – по базису представления $[\lambda_{12}] \times [l_3]$ и (2.4) – по базису представления $[\lambda_{13}] \times [l_2]$.

Таким образом, наша задача состоит в отыскании ортогональной (вследствие ортонормированности базисов – см. [6]) матрицы перехода от (2.3) к (2.4). Подставим в (2.4) разложение

$$s = \sum_{\lambda, \rho, \rho'} (\rho | s | \rho') O_{\rho\rho'}^{\lambda}, \quad (2.9)$$

где $(\rho | s | \rho')$ – матричный элемент s в соответствующем неприводимом представлении, не равный нулю только в случае, если символы $r+1, \dots, n$ в ρ' расположены в той же косо-схеме, что и в ρ [8, 9]. Воспользовавшись правилами умножения операторов Юнга, получаем:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_{13}) &= \left(\rho''(\eta) | s P^{l_2} P^{l_3} s^{-1} | \rho''(\eta) \right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \sum_{\rho'''(\eta)=p_2 p_3 \rho'(\eta)} \sum_{\lambda_{12}} \left(\rho'''(\eta) | P^{l_2} P^{l_3} | \rho'''(\eta) \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\rho''(\eta) | s | \rho'''(\eta) \right) \Psi(\lambda_{12}) = \left(\rho''(\eta) | s P^{l_2} P^{l_3} s^{-1} | \rho''(\eta) \right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\rho'(\eta) | P^{l_2} P^{l_3} | \rho'(\eta) \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda_{12}} \left(\rho''(\eta) | s P^{l_2} P^{l_3} | \rho'(\eta) \right) \Psi(\lambda_{12}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\rho'''(\eta)$ отличаются от $\rho'(\eta)$ только перестановками из $P^{l_2} P^{l_3}$ (тем самым соответствуют тому же λ_{12}). Справедливость второго равенства в (2.10) следует из [6]:

$$(\rho'' | P^{l_2} P^{l_3} | \rho') = (\rho'' | P^{l_2} P^{l_3} | \rho'')^{\frac{1}{2}} (\rho' | P^{l_2} P^{l_3} | \rho')^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая явное выражение для матричных элементов суммы последовательных символов (равенство (4.10) в [6]), для матричного элемента матрицы преобразования получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \prod_{r+l_2 \geq p > q > r} \left(1 + \frac{1}{x_p(\rho') - x_q(\rho')} \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{n \geq p > q > r+l_2} \left(1 + \frac{1}{x_p(\rho') - x_q(\rho')} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \prod_{r+l_2 \geq p > q > r} \left(1 + \frac{1}{x_p(\rho'') - x_q(\rho'')} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \prod_{n \geq p > q > r+l_2} \left(1 + \frac{1}{x_p(\rho'') - x_q(\rho'')} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left(\rho''(\eta) | sP^{l_2}P^{l_2} | \rho'(\eta) \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $x_p(\rho)$ — „координата“ символа p в стандартной таблице $\rho(\eta)$.

Воспользуемся здесь результатами работы [9]. Матричный элемент выражения $sP^{l_2}P^{l_2}$ — это сумма коэффициентов при перестановках из $sP^{l_2}P^{l_2}$ в (см. равенство (4.16) в [9])

$$\begin{aligned} & \prod_{\substack{p > q > r \\ (\sigma(p) < \sigma(q))}} \left(1 - \frac{1}{(x_p(\rho') - x_q(\rho'))^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma(\rho'' \rho') \times \\ & \times \uparrow \prod_{\substack{\sigma(p) > r \\ (\sigma(p) > \sigma(q))}} \uparrow \prod_{\substack{p > q > r \\ (\sigma(p) > \sigma(q))}} \left(\varepsilon + \frac{(p q)}{x_p(\rho') - x_q(\rho')} \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\sigma(\rho'' \rho')$ — перестановка, переводящая $\rho'(\eta)$ в $\rho''(\eta)$ и $\sigma(p)$ — символ подставляемый перестановкой $\sigma(\rho'' \rho')$ вместо p ; стрелки указывают, что произведение берется в порядке возрастания $\sigma(p)$ и q слева направо.

Сделаем далее упрощающее вывод предположение, возможное в случае косо-схем со всеми $|x_p - x_q| > 1$. Именно, воспользуемся отмеченой выше некоторой произвольностью в выборе $\rho'(\eta)$ и $\rho''(\eta)$, выбрав из отличающихся перестановками из $P^{l_2}P^{l_2}$ и $sP^{l_2}P^{l_2}s^{-1}$ стандартных таблиц такие $\rho'(\eta)$ и $\rho''(\eta)$, чтобы $\sigma(\rho'' \rho')$ имела следующий вид (к каждому числу следует прибавить опущенное для удобства записи r):

$$\begin{aligned} & \overbrace{\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \dots & l_2 - l' & l_2 - l' + 1 & \dots & l_2 \\ l_2 + l_3 & l_2 + l_3 - 1 & \dots & l_3 + l' - 1 & l_3 & \dots & l_3 - l' + 1 \end{array}}^{\alpha} \times \\ & \times \overbrace{\begin{array}{ccccccccc} l_2 + 1 & \dots & l_2 + l' & l_2 + l' + 1 & \dots & l_2 + l_3 - 1 & l_2 + l_3 \\ l_3 + l' & \dots & l_3 + 1 & l_3 - l' & \dots & 2 & 1 \end{array}}^{\beta}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $2 l'$ – число клеток, в которых в Р.С. и Р.К. находятся разные символы; для наглядности сверху и снизу указано, какими символами (α или β) обозначены соответствующие клетки в Р.С. и Р.К. В данном случае из (2.11) и (2.12) легко получаем (2.1) с $F(x_i - x_k)$ в качестве суммы коэффициентов при перестановках, ставящих одно из q вместо каждого из p в выражении

$$K = \uparrow \prod_{r+l_2+l' \geq p > r+l_2} \uparrow \prod_{r+l_2 \geq q > r+l_2-l'} \left(\varepsilon + \frac{(p q)}{x_p(\rho') - x_q(\rho')} \right). \quad (2.14)$$

Эта сумма симметрична по отношению к перестановкам t индексов „координат“ p и по отношению к перестановкам t' индексов q , так как соответствующая произвольность в выборе $\rho'(\eta)$ остается и при условии (2.13). Кроме того, искомая сумма коэффициентов одинакова в K и $tt' Kt'^{-1}t^{-1}$, откуда следует достаточность требования одинаковости порядка по k для каждого i в (2.2)

3. Обобщение симметрии Редже

В общем случае косо-схема, задающая матрицу преобразования, имеет определенное число (u) двуклеточных столбцов (в примере предыдущего раздела $u=1$). Покажем, что *соответствующая матрица преобразования отличается от матрицы, задаваемой косо-схемой, полученной из первой отбрасыванием любого числа $v \leq u$ двуклеточных столбцов, только множителем* $(-1)^v$. Так, матричный элемент, задаваемый расположениями примера предыдущего раздела, отличается только знаком от матричного элемента

$$\begin{pmatrix} & \boxed{\beta} & & \\ & \vdash \dashv & & \\ & \beta & & \\ & \vdash \dashv & & \\ \alpha & & \boxed{\beta} & \\ & & \vdash \dashv & \\ & & \beta & \end{pmatrix} = -\frac{1}{4\sqrt{2 \cdot 3}}.$$

Здесь пунктиром отмечена одна из отброшенных клеток с целью указания „расстояния“ между удаленными друг от друга частями косо-схемы.

Чтобы доказать утверждение, достаточно убедиться в справедливости его в случае $v=1$. Пусть

$$x_i = x_{k_1} - 1. \quad (3.1)$$

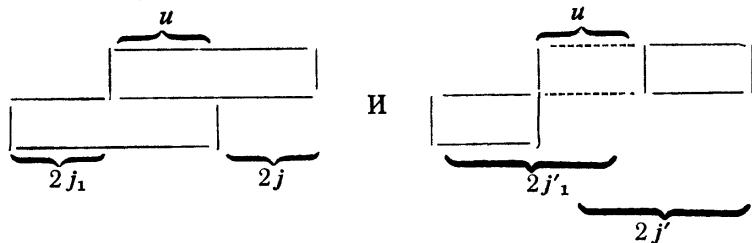
Прямая подстановка этого значения x_i в (2.1) показывает, что в выражении, стоящем перед $F(x_i - x_k)$, после сокращения остаются только множители,

не содержащие x_{k_1} и x_{i_1} , тем самым полученное выражение соответствует матричному элементу, задаваемому расположениями, полученными из Р.С. и Р.К. отбрасыванием столбца с клетками i_1 и k_1 . Остается показать, что $F(x_i - x_k)$ для соответствующих двух матричных элементов отличаются только знаком. Ограничение, налагаемое на порядок следования транспозиций в (2.2), не противоречит выбору порядка следования $(i_1 k_{l'}) \dots (i_1 k_1) (i_2 k_{l'}) \dots (i_2 k_1) \dots \dots (i_l k_{l'}) \dots (i_l k_1)$. Если при этом в произведении транспозиций будет присутствовать только одна транспозиция $(i_1 k_1)$ из первых l' , данное произведение даст требуемую перестановку только в случае отсутствия и остальных транспозиций с k_1 . Если же в произведении, дающем перестановку требуемого вида, присутствует $(i_1 k_p)$ с $p > 1$, то перестановку того же вида даст и произведение, отличающееся наличием (или отсутствием) $(i_1 k_1)$. Таким образом, $F(x_i - x_k)$ может быть записано в виде

$$\frac{1}{x_{i_1} - x_{k_1}} F^*(x_i - x_k) + \left(1 + \frac{1}{x_{i_1} - x_{k_1}}\right) f(x_i - x_k), \quad (3.2)$$

где $F^*(x_i - x_k)$ является выражением, составленным по тому же правилу (2.2) для „координат“ с индексами $i_2 \dots i_{l'}$ и $k_2 \dots k_{l'}$, а $f(x_i - x_k)$ – функция всех $2l'$ аргументов. Подставляя (3.1) в (3.2.) и получаем желаемый результат.

В случае группы U_2 матрицы преобразования задаются двустрочными косо-схемами. Рассмотренное свойство симметрии приводит к тому, что матрицы преобразования, задаваемые косо-схемами

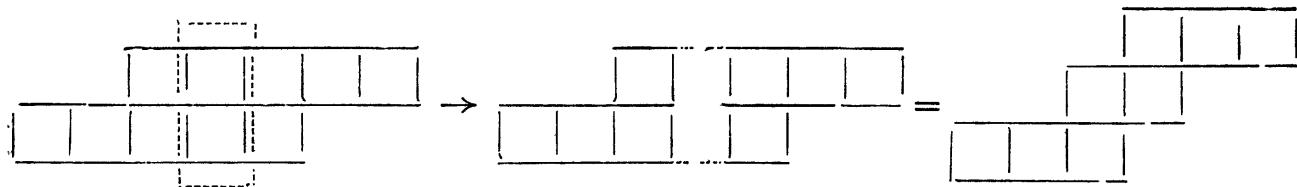


отличаются только множителем $(-1)^u$. Или, задавая матричные элементы общепринятыми в теории момента количества движения параметрами $j_1, j_2, j_3, j_1^3, j_{13}, j$, имеем

$$\begin{aligned} ((j_1 j_3) j_{13} j_2 j | (j_1 j_2) j_{12} j_3 j) = & (-1)^u \left((j_1 + \frac{u}{2}, j_3 - \frac{u}{2}) j_{13} j_2 - \right. \\ & \left. - \frac{u}{2}, j + \frac{u}{2} \mid (j_1 + \frac{u}{2} j_2 - \frac{u}{2}) j_{12} j_3 - \frac{u}{2}, j + \frac{u}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $u = j_2 + j_3 - j_1 - j$. Выражая матричные элементы матриц преобразования через коэффициенты Ракаха, получаем известное свойство симметрии Редже коэффициентов Ракаха группы U_2 (см. [1, 10, 11]). Отметим, что соотношение симметрии (3.3) соответствует отбрасыванию всех двуклеточных столбцов в двустрочной косо-схеме. Только тогда остающаяся косо-схема

является также двустрочной и, таким образом, задает матрицу преобразования группы U_2 . Если же отбросим меньшее число столбцов, получим в результате косо-схему, задающую матрицу преобразования, встречающуюся только в группах U_k с $k > 2$. Например,



Здесь в первой схеме пунктиром обведен отбрасываемый столбец; части полученной схемы сдвинуты относительно друг друга (с сохранением „расстояния“ между ними) до получения косо-схемы в стандартном виде ([643]–[32]), задающей матрицу преобразования, встречающуюся в группах с $k \geq 3$.

Таким образом, для унитарных групп большей размерности рассмотренное свойство симметрии связывает большее число различных матриц преобразования.

4. Выражение $F(x_i - x_k)$

Можно указать несколько выражений для $F(x_i - x_k)$; в частности, содержащих, кроме разностей $(x_i - x_k)$, также $(x_i - x_{i'})$ или $(x_k - x_{k'})$. Ниже сформулируем правило составления алгебраического выражения, следующее прямо из определения $F(x_i - x_k)$ в (2.1) – (2.2) и содержащего только разности $(x_i - x_k)$. Для сокращения записи как „координаты“ клеток с α, β соответственно в Р.С., Р.К., так и „координаты“ с β, α пронумеруем числами 1, 2, ..., l' , при этом координаты последних будем обозначать буквой y .

Рассматриваемое выражение является суммой членов, каждому из которых ставится в соответствие квадратная матрица размерности l' , удовлетворяющая следующим условиям:

1) r матричных элементов a_{rs} в r -той строке равны единице, а остальные $(l' - r)$ – нулю.

$$2) \sum_{p=1}^s a_{r-1,p} \leq \sum_{p=1}^s a_{rp} \leq \sum_{p=1}^s a_{r-1,p} + 1 \quad \text{для всех } s = 1, 2, \dots, l'.$$

Каждому матричному элементу a_{rs} соответствует в данном слагаемом множитель:

$$1) \frac{1}{x_r - y_s} \quad \text{если} \quad a_{rs} \neq a_{r-1,s},$$

$$2) \left(1 + \frac{1}{x_r - y_s}\right) \quad \text{если} \quad a_{rs} = a_{r-1,s} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^s a_{rp} = \sum_{p=1}^s a_{r-1,p}$$

$$\text{или} \quad a_{rs} = a_{r-1,s} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^s a_{rp} = \sum_{p=1}^s a_{r-1,p} + 1,$$

3) 1 в остальных случаях.

Так, в случае $l'=3$ имеем 7 слагаемых, соответствующих матрицам

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Выпишем в качестве примера только третье из них:

$$\frac{1}{x_1 - y_2} \cdot \frac{1}{x_2 - y_1} \cdot \frac{1}{x_3 - y_3} \left(1 + \frac{1}{x_1 - y_3}\right) \left(1 + \frac{1}{x_2 - y_3}\right) \left(1 + \frac{1}{x_3 - y_1}\right) \left(1 + \frac{1}{x_3 - y_2}\right).$$

В случае $l'=1, 2$ сформулированное правило приводит к следующим простым выражениям для F :

$$l'=1 \quad F = \frac{1}{x_1 - y_1}$$

$$l'=2 \quad F = \frac{1}{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)} \left(1 + \frac{1}{x_1 - y_2}\right) \left(1 + \frac{1}{x_2 - y_1}\right) + \frac{1}{(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)}.$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Литература

1. А. П. Юцис, И. Левинсон, В. Ванагас, Математический аппарат теории момента количества движения, Госполитнаучиздат, Вильнюс, 1960.
2. J. J. de Swart, Nuovo Cimento, 31, 420 (1964).
3. K. T. Hecht, Nucl. Phys., 62, 1 (1965).
4. M. Resnikoff, J. Math. Phys., 8, 79 (1967).
5. С. И. Алишаускас, Лит. физ. сб., IX, 641 (1969).
6. А. А. Юцис, Лит. мат. сб., VIII, 597 (1968).
7. G. de B. Robinson, Representation theory of the Symmetric group, Edinburgh, 1948.
8. D. E. Rutherford, Substitutional analysis, Edinburgh, 1948.
9. А. А. Юцис, Лит. физ. сб., VI, 163 (1966).
10. T. Regge, Nuovo cimento, II, 116 (1959).
11. А. П. Юцис, А. А. Бандзайтис, Теория момента количества движения в квантовой механике, Вильнюс, „Минтис“, 1965.

SIMETRINIŲ GRUPIŲ ATVAIZDAVIMAI IR UNITARINIŲ GRUPIŲ TRANSFORMACIJOS MATRICOS

Alg. Jucys

Reziumė

Rasta transformacijos matrica, atitinkanti surišimo būdo pakeitimą: $(([\lambda_1] \times [l_a])[\lambda_{12}] \times [l_a]) [\lambda]$ → $(([\lambda_1] \times [l_s])[\lambda_{13}] \times [l_a]) [\lambda]$. Čia $[\lambda_1]$ – bet koks, o $[l_a]$, $[l_s]$ – simetriniai U_k grupės atvaizdavimai. Nustatyta simetrijos ryšys, kuris atskiru atveju duoda Regge simetrija Racachio koeficientams.

Lietuvos TSR Mokslo akademijos
Fizikos ir matematikos institutas

REPRESENTATIONS OF THE SYMMETRIC GROUPS AND RECOUPLING COEFFICIENTS FOR THE UNITARY GROUPS

Alg. Jucys

Summary

The transformation matrix between two coupling schemes $(([\lambda_1] \times [l_a])[\lambda_{12}] \times [l_a]) [\lambda]$ and $(([\lambda_1] \times [l_s])[\lambda_{13}] \times [l_a]) [\lambda]$, where $[\lambda_1]$ is arbitrary and $[l_a], [l_s]$ symmetric irreducible representations of the group U_k , is obtained. The symmetry relation which in special case leads to the well-known Regge symmetry for Racah coefficients, is discussed.

Institute of Physics and Mathematics
of the Academy of Sciences of the Lithuanian SSR